MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 7. DEZEMBER 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1948

Math.
Z.

Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben[1]).

Von

H. Bückner in Göttingen.

Einleitung.

Es handelt sich um die bekannte selbstadjungierte Aufgabe

$$[r(x)y'(x)]' + (\lambda p(x) + q(x))y = 0 \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{2}$$

Die Funktionen $r(x)$, $p(x)$, $q(x)$ mögen im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. An einigen Stellen dieser Arbeit werden weitergehende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen getroffen werden. Ich werde sie von Fall zu Fall formulieren. Ferner sei

$$0 < C_1 \leqq p \leqq C_2; \quad 0 < C_1 \leqq r \leqq C_2; \quad |q| \leqq C_2 \tag{3}$$

mit C_1 und C_2 als passend gewählten Konstanten. Nach dem bekannten Oszillationstheorem von STURM[2]) gibt es unendlich viele Eigenwerte. Alle sind reell und lassen sich als eine monoton gegen $+\infty$ wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ schreiben. Jeder Eigenwert ist einfach.

Zur Behandlung der Eigenwertaufgabe mit dem Differenzenverfahren teilen wir das Grundintervall $\langle a, b\rangle$ in n gleiche Teile der Länge

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Wir nennen h die Schrittweite. Bedeutet $f(x)$ eine beliebige Funktion im Grundintervall, so setzen wir zur Abkürzung

$$x_k = a + kh, \quad f_k = f(x_k), \quad \text{für } 0 \leqq k \leqq n.$$

---

[1]) Diese Arbeit enthält einen wesentlichen Teil meiner Habilitationsschrift. Die Habilitation erfolgte 1944 zu Darmstadt. Referenten waren die Herren Prof. Dr. L. COLLATZ und Prof. Dr. A. WALTHER. Besonders Herrn COLLATZ habe ich für die Problemstellung und sein ständiges Interesse an dieser Arbeit zu danken.

[2]) Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Lpz. 1942, S. 266.

Man erkennt, daß der Index k den Funktionswert nur bei einer bestimmten Zahl n eindeutig kennzeichnet. Da jedoch alle in irgendeiner Relation vorkommenden Abkürzungen für die gleiche Zahl n oder die gleiche Schrittweite gelten werden, sind Irrtümer ausgeschlossen. Nunmehr setzen wir die Differenzengleichungen

$$\Delta(r_{i-1/2}\Delta F_{i-1}) + h^2(\Lambda^{(n)} p_i + q_i) F_i = 0 \tag{4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

an. Hierin bedeuten die Zeichen $F_0, F_1, \ldots F_n$ gesuchte Größen, welche den Randbedingungen

$$F_0 = F_n = 0 \tag{4'}$$

genügen sollen. Das Zeichen Δ kennzeichnet den bekannten Differenzenoperator. Es ist also

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i, \quad \Delta(r_{i-1/2}\Delta F_{i-1}) = r_{i+1/2}(F_{i+1} - F_i) - r_{i-1/2}(F_i - F_{i-1}).$$

Trägt man die Randbedingungen (4') in die Gleichungen (4) ein, so ergibt sich ein System von $(n-1)$ homogenen Gleichungen für die Unbekannten $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Es ist nur dann nichttrivial lösbar, wenn seine Determinante verschwindet. Diese Bedingung läßt sich auf die Form einer Säkulargleichung für $\Lambda^{(n)}$ bringen. Es existieren daher $(n-1)$ reelle Wurzeln

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \Lambda_{n-1}^{(n)},$$

für welche die Determinante verschwindet. Diese Wurzeln nennen wir die Differenzeneigenwerte n-ter Ordnung. Eine zu $\Lambda_k^{(n)}$ gehörige Lösung des Systems homogener Gleichungen nennen wir eine Differenzeneigenlösung. Unter

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)}$$

ist stets eine solche, $\Lambda_k^{(n)}$ entsprechende Lösung zu verstehen.

Die genannten Differenzengleichungen wurden erstmalig von Herrn Collatz[3]) untersucht. Von seinen Ergebnissen seien die folgenden hervorgehoben:

Die Zahlen $F_i^{(n,1)}$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sind sämtlich von Null verschieden und besitzen einerlei Vorzeichen. Es besteht die Ungleichung

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\left(\frac{\Delta w_{i-1}}{h}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i \cdot w_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot w_i^2}.$$

Dabei dürfen die Zahlen $w_0, w_1, \ldots, w_n$ bis auf die Bedingung $w_0 = w_n = 0$ beliebige Werte annehmen, aber nicht alle zugleich verschwinden. In

[3]) L. Collatz, Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung. Deutsche Math. **2**, Heft 2, S. 189—215.

der Ungleichung wird das Gleichheitszeichen nur für den Fall $w_i = F_i^{(n,1)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ angenommen. Es gilt ferner die Abschätzung

$$|\lambda_1 - \Lambda_1^{(n)}| \leqq C_3 \cdot h^2$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C_3. Danach konvergieren die ersten Differenzeneigenwerte mit wachsender Ordnung gegen den ersten Eigenwert λ_1.

Die Untersuchungen dieser Arbeit haben weitergehende Konvergenzbetrachtungen zum Gegenstand. Sie beziehen sich auf alle Differenzeneigenwerte und auf alle Differenzeneigenlösungen eines allgemeineren Differenzenverfahrens, welches die von Herrn Collatz untersuchten Gleichungen als Spezialfall enthält. Es handelt sich um die Gleichungen

$$\Delta(\bar{r}_{i-1/2}\,\Delta F_{i-1}) + h^2(\Lambda^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i = 0 \tag{5}$$

$$F_0 = F_n = 0 \tag{5'}$$

mit gewissen Koeffizientenfunktionen $\bar{r}(x), \tilde{p}(x), \tilde{q}(x)$, deren Bedeutung im folgenden erläutert sei. Es ist zunächst

$$\begin{aligned} \bar{r}(x) &= r(x) + h^2 \cdot (\Lambda^{(n)} \cdot \sigma^{(n)}(x) + \tau^{(n)}(x)) \\ \tilde{p}(x) &= p(x) + h^2 \cdot \xi^{(n)}(x) \\ \tilde{q}(x) &= q(x) + h^2 \cdot \zeta^{(n)}(x)^{4}). \end{aligned} \tag{5''}$$

Hierbei sind $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ vier im Grundintervall $\langle a, b\rangle$ stetig definierte Funktionen, die noch von n abhängen und mit wachsendem n gleichmäßig konvergieren. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)}(x) &= \sigma(x), \quad \lim_{n\to\infty} \tau^{(n)}(x) = \tau(x), \\ \lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}(x) &= \xi(x), \quad \lim_{n\to\infty} \zeta^{(n)}(x) = \zeta(x). \end{aligned} \tag{5'''}$$

Die Funktionen $\bar{r}, \tilde{p}, \tilde{q}$ hängen, was wohl zu beachten ist, von n und zum Teil auch von $\Lambda^{(n)}$ ab. Verschwinden die Funktionen $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ identisch, so gehen die Gleichungen (5) in die Gleichungen (4) über. Diese letzteren werden wir durch den Namen „normale Gleichungen" und das entsprechende Differenzenverfahren als „normales" Verfahren besonders hervorheben.

Die Gleichungen (5) enthalten $\Lambda^{(n)}$ linear. Sie sind nach Eintragen der Randbedingungen (5') nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante des entsprechenden Gleichungssystems verschwindet. Das ergibt eine algebraische Gleichung für $\Lambda^{(n)}$. Ihr Grad beträgt im allgemeinen $(n-1)$. Sie besitzt, wie noch später gezeigt werden wird, lauter reelle Wurzeln, die wir der Größe nach ordnen,

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \Lambda_3^{(n)} \leqq \ldots.$$

---

[4]) Noch allgemeiner wäre $\tilde{q}(x) = q(x) + h^2(\Lambda^{(n)}\eta^{(n)}(x) + \zeta^{(n)}(x))$. Die Einführung von $\eta^{(n)}$ ist aber bedeutungslos, da die Gleichungen (5) $\xi^{(n)}$ und $\eta^{(n)}$ nur in der Form $(\xi^{(n)} + \eta^{(n)})$ enthalten.

Unter

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)}$$

verstehen wir eine zu $\Lambda_k^{(n)}$ gehörige nichttriviale Lösung der Gleichungen (5) und (5′). Die Bezeichnung Differenzeneigenwerte und Differenzeneigenlösungen behalten wir bei.

Die Berechnung der Wurzeln beim allgemeineren Verfahren ist nicht mit wesentlich mehr Rechenarbeit gegenüber dem normalen Verfahren verbunden. Wohl aber kann man hoffen, daß bei passender Wahl der vier Funktionen $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ bessere Näherungen für die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems entstehen, als sie das normale Verfahren liefern kann. In der Tat ist eine solche Wahl möglich. Einige Ergebnisse dieser Arbeit sind:

Unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen σ, τ, ξ und ζ existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k - \Lambda_k^{(n)}}{h^2} = \omega_{kk}$$

$$= \frac{\int_a^b y_k^2 \cdot \left\{ \frac{(\lambda_k p + q)^2}{12\, r} - \frac{\lambda_k p + q}{r}(\lambda_k \sigma + \tau^*) + \lambda_k \xi + \zeta - \left[r \left(\frac{\lambda_k \sigma + \tau^*}{2\, r} \right)' \right]' \right\} dx}{\int_a^b p\, y_k^2\, dx}$$

$$\tau^* = \tau + \frac{r^2}{24}\left(\frac{1}{r}\right)'',$$

wobei y_k die zu λ_k gehörige Eigenfunktion ist. Im Falle der normalen Gleichungen kann auch

$$\omega_{kk} = \frac{\int_a^b y_k' \{ r\, y_k''' + (r\, y_k')'' \}\, dx}{24 \int_a^b p\, y_k^2\, dx}$$

geschrieben werden. Besonderes Interesse verdient der Spezialfall $\sigma^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv \tau^* \equiv 0$ mit

$$\omega_{kk} = \frac{\int_a^b \frac{(\lambda_k p + q)^2}{12\, r} \cdot y_k^2\, dx}{\int_a^b p\, y_k^2\, dx}.$$

Fast alle Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ liegen unterhalb λ_k. Für $q \equiv 0$ ist

$$\omega_{kk} = \frac{\lambda_k^2\, p(\bar{x})}{12\, r(\bar{x})}$$

mit $\bar{x}$ als geeigneter Abszisse. Auf Grund dieser Formel kann man einen verbesserten Differenzeneigenwert gemäß

$$\tilde{\Lambda}_k^{(n)} = \Lambda_k^{(n)} + h^2 \cdot \Lambda_k^{(n)2} \cdot \frac{p(\tilde{x})}{12\, r(\tilde{x})}$$

berechnen. Es stellt $\tilde{x}$ einen geschätzten Wert von $\bar{x}$ dar.

Ein nicht minder wichtiger Spezialfall entsteht, wenn

$$\sigma = \frac{r}{12}, \quad \tau = \frac{q}{12} - \frac{r^2}{24}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)'', \quad \xi = \left[r\cdot\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right]', \quad \zeta = \left[r\cdot\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right]'$$

gesetzt wird. Es ist dann

$$\omega_{kk} = 0.$$

Das Verfahren konvergiert also besonders stark, und unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß sogar der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k - \Lambda_k^{(n)}}{h^4}$$

existiert. Einige Rechenbeispiele am Schluß dieser Arbeit werden die praktische Bedeutung der beiden speziellen Verfahren unterstreichen.

Die in dieser Arbeit bewiesene Existenz der Grenzwerte ω_{kk} erlaubt es, eine Verbesserungsmethode [5]) bei jedem beliebigen Spezialfall des Differenzenverfahrens anzuwenden, wenn mindestens zwei Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ und $\Lambda_k^{(m)}$ bekannt sind. Näherungsweise gilt doch

$$(\lambda_k - \Lambda_k^{(n)})\, n^2 \approx (\lambda_k - \Lambda_k^{(m)})\, m^2 \approx \omega_{kk}\,.\,(a-b)^2.$$

Daraus folgt

$$\lambda_k \approx \frac{\Lambda_k^{(m)}\,.\,m^2 - \Lambda_k^{(n)}\,.\,n^2}{m^2 - n^2}.$$

Im Falle $\omega_{kk} = 0$, sind m^2 und n^2 durch die 4. Potenzen von m und n zu ersetzen. Numerische Beispiele auch hierfür am Schluß der Arbeit.

Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden lassen sich auch auf andere Eigenwertprobleme anwenden.

§ 1.

Zusammenstellung von Hilfsmitteln.

Um die Ableitung der Hauptergebnisse dieser Arbeit möglichst übersichtlich zu gestalten, sollen einige Hilfsmittel und Hilfssätze vorweggenommen werden. Dies erscheint auch deswegen gerechtfertigt, weil die Aussagen hierüber unabhängig vom Differenzenverfahren sind.

1. Das Eigenwertproblem.

Zu jedem Eigenwert λ_k gibt es eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Eigenfunktion y_k. Durch die für alles folgende festgesetzte Normierung

$$\int_a^b p(x)\, y_k^2(x)\, d(x) = 1 \tag{6}$$

ist sie nur noch bis auf einen Faktor vom Betrage Eins unbestimmt.

[5]) Auch Herr Collatz benutzt diese Methode. Vgl. ZaMM **14** (1934), S. 317.

Wir entscheiden uns nun für eine der beiden möglichen Erscheinungsformen von y_k, so daß wir es im folgenden nur noch mit eindeutig festgelegten Eigenfunktionen zu tun haben.

Besitzen die Funktionen p, q, r stetige Ableitungen bis zur m-ten Ordnung, so ist jede Eigenfunktion $(m+1)$-mal stetig differenzierbar. Gleiches gilt für die Funktionen ry_k'. Die eingangs genannten Voraussetzungen besagen, daß m mindestens den Wert 2 haben muß.

Die Eigenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b p y_k y_m \, dx = 0 \quad \text{für} \quad k \neq m.$$

Jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ des Grundintervalls, die den Randbedingungen $f(a) = f(b) = 0$ genügt, läßt sich auf genau eine Weise durch eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe aus den Eigenfunktionen darstellen,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k y_k(x)$$

mit den Koeffizienten

$$d_k = \int_a^b p f y_k \, dx.$$

Das System der Eigenfunktionen ist vollständig; d. h. es gibt keine stetige, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$, für welche die vorstehend gebildeten Koeffizienten alle zugleich verschwinden.

Alle Eigenfunktionen bleiben ihrem Betrag nach unterhalb einer gemeinsamen Schranke. Es gilt also

$$|y_k| \leqq Y; \quad a \leqq x \leqq b; \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Auch läßt sich Y so bestimmen, daß die Abschätzungen

$$|y_k'| \leqq Y \cdot k; \quad a \leqq x \leqq b; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7'}$$

gelten [6]).

Die Differentialgleichung

$$(ry')' + y(\lambda_k p + q) = f(x) \tag{8}$$

mit einer stetigen Funktion $f(x)$ besitzt dann und nur dann eine die Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ befriedigende Lösung, wenn

$$\int_a^b f y_k \, dx = 0 \tag{9}$$

ist. Die Lösung ist bis auf ein Vielfaches von y_k als additivem Glied eindeutig bestimmt.

---

[6]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Auflage, Springer, Berlin, S. 288.

2. Quadratische Formen[7]).

Es seien

$$K(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \cdot u_i u_j, \quad H(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$$

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad h_{ij} = h_{ji}$$

zwei reelle quadratische Formen und von ihnen mindestens eine definit. Wir betrachten die Gleichung

$$\| k_{ij} - \varrho \cdot h_{ij} \| = 0 \tag{10}$$

für die Unbekannte ϱ; sie stellt zugleich die Bedingung für die nichttriviale Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \varrho\, h_{ij})\, u_j = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

dar. Die Gleichung (10) besitzt lauter reelle Wurzeln. Sind alle Wurzeln einfach, so sind die entsprechenden nichttrivialen Lösungen von (11) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Hat aber (10) eine mehrfache Wurzel, so auch das System (11) eine dem Grad der Vielfachheit gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Von nun ab sei $H(u,u)$ als positiv definit angenommen. Dann kann man zu einer mehrfachen Wurzel von (10) ein System linear unabhängiger Lösungen der Gleichungen (11) so bestimmen, daß zwei verschiedene Lösungen

$$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots u_n^{(k)}; \quad u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \ldots, u_n^{(l)}$$

in der Beziehung

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot u_i^{(k)} u_j^{(l)} = 0$$

zueinander stehen. Gehören die beiden Lösungen zu verschiedenen Wurzeln, so genügen sie ohnehin dieser „Orthogonalitätsrelation".

Der Grad der Gleichung (10) beträgt n. Unter den n Wurzeln

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \ldots \leqq \varrho_n$$

ist ϱ_s der kleinste Wert, den die Funktion

$$J(u,u) = \frac{K(u,u)}{H(u,u)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot w_i^{(k)} u_j = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

annehmen kann. Dabei stellt $w_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine zu ϱ_k gehörige nichttriviale Lösung von (11) dar und alle derartigen Lösungen $w_i^{(k)}$ sollen paarweise die obige Orthogonalitätsrelation erfüllen.

---

[7]) R. Courant und D. Hilbert, l. c., S. 32, 33.

Man kann ϱ_s auch als den größten Wert kennzeichnen, den das unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} u_j = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

gebildete Minimum von $J(u, u)$ als Funktion der Parameter α_{kj} annehmen kann.

Sind neben K und H zwei entsprechende Formen K^* und H^* gegeben und ist ferner

$$J(u, u) \leqq J^*(u, u),$$

so folgt daraus $\varrho_i \leqq \varrho_i^*$. Wir werden von dieser Ungleichung unter dem Namen der Majorantenabschätzung Gebrauch machen. Sie läßt sich mit Hilfe der Maximum-Minimum-Eigenschaft der charakteristischen Zahlen ϱ_i ohne weiteres einsehen.

Die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ treten auch bei einer Transformation der beiden quadratischen Formen K und H in Erscheinung. Es existiert eine Substitution

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} v_j . l_{ij},$$

welche die beiden Formen in die einfache Gestalt

$$K(u, u) = \sum_{j=1}^{n} \varrho_j . v_j^2, \quad H(u, u) = \sum_{j=1}^{n} v_j^2$$

überführt.

3. Polygonfunktionen. Taylorformeln.

Wir bezeichnen eine im Grundintervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion als n-teilige Polygonfunktion[8]), wenn sie in jedem Abschnitt (Masche) des in n gleiche Teile zerlegten Grundintervalls linear ist. Durch ihre Ordinaten in den Gitterpunkten des Maschensystems ist sie eindeutig bestimmt. Als Beispiel definieren wir eine Polygonfunktion durch den Ansatz

$$F^{(n,k)}(x_i) = F_i^{(n,k)}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Polygonfunktion $F^{(n,k)}(x)$ wird in dieser Arbeit eine erhebliche Rolle spielen.

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion des Grundintervalls und $f_n(x)$ die mit ihr in den Gitterpunkten eines n-teiligen Maschensystems überein-

---

[8]) Vgl. R. Courant, Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. Acta math. **49** (1926), S. 1—68. Der Begriff der Polygonfunktion wird dort im Zusammenhang mit dem Differenzenverfahren benutzt.

stimmende n-teilige Polygonfunktion. Wir definieren dann

$$f_n'(x) = \frac{\Delta f_i}{h} \quad \text{für} \quad x_i \leqq x < x_{i+1}, \text{ falls } i+1 \neq n, \text{ und}$$

$$f_n'(x) = \frac{\Delta f_{n-1}}{h} \quad \text{für} \quad x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$$

als Ableitung der n-teiligen Polygonfunktion f_n. Ist nun $f(x)$ stetig differenzierbar, so liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{\Delta f_i}{h} = f'(\gamma_i); \quad x_i \leqq \gamma_i \leqq x_{i+1}.$$

Somit ist

$$|f'(x) - f_n'(x)| = |f'(x) - f'(\gamma_i)|; \quad |x - \gamma_i| \leqq h.$$

Hieraus folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f'(x)$ der

Hilfssatz 1. Ist die Funktion $f(x)$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz.

Ist die Funktion $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, so gelten die Formeln

$$(12) \quad \int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt = \frac{\alpha}{2}(f(x+\alpha) + f(x)) - \frac{\alpha^3}{12} f''(\beta); \quad x \leqq \beta \leqq x+\alpha;$$

$$(13) \quad \int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt = \alpha f\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^3}{24} f''(\beta'); \quad x \leqq \beta' \leqq x+\alpha;$$

von denen die erste als Sehnen-, die zweite als Tangententrapezformel bezeichnet wird. Aus (13) folgt

$$(14') \quad \lim_{n \to \infty} h^{-1} \cdot \left\{ \int_a^b f\,dt - \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \cdot h \right\} = \frac{f'(b) - f'(a)}{24}.$$

Aus (12) ergibt sich, falls f den Randbedingungen genügt,

$$(14) \quad \lim_{n \to \infty} h^{-2} \cdot \left\{ \int_a^b f\,dt - \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot h \right\} = \frac{f'(a) - f'(b)}{12}.$$

Ist $f(t)$ dreimal stetig differenzierbar, so ergibt sich aus (13)

$$(15) \quad f(t) \Big|_x^{x+\alpha} = \alpha f'\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^3 \frac{f'''(\beta'')}{24}; \quad x \leqq \beta'' \leqq x+\alpha;$$

Wenn $f(t)$ fünfmal stetig differenzierbar ist, kann man durch Taylorentwicklungen zur Formel

$$(16) \quad f(t) \Big|_x^{x+\alpha} = \alpha f'\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^3}{24} f'''\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^5}{5!\,2^4} f^{(V)}(\beta''')$$

$$x \leqq \beta''' \leqq x + \alpha$$

gelangen.

§ 2.

Allgemeine Bemerkungen über die Differenzengleichungen.

Unter Benutzung der Abkürzung

$$\tilde{r} = r + h^2 . \tau^{(n)} \tag{17}$$

wollen wir nun die Gleichungen (5) ausführlicher schreiben und zwar

$$\begin{aligned} &F_{i-1}(\tilde{r}_{i-1/2} + h^2 . \Delta^{(n)} . \sigma^{(n)}_{i-1/2}) + F_i(-\tilde{r}_{i+1/2} - \tilde{r}_{i-1/2} + h^2 . \tilde{q}_i + \\ &+ h^2 . \Delta^{(n)} . [p_i - \sigma^{(n)}_{i-1/2} - \sigma^{(n)}_{i+1/2}]) + F_{i+1}(\tilde{r}_{i+1/2} + h^2 . \Delta^{(n)} . \sigma^{(n)}_{i+1/2}) = 0; \\ &i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{18}$$

Tragen wir (5′) hierin ein, so entsteht ein System von Gleichungen für $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ mit einer Koeffizientenmatrix $h^2 . \mathfrak{M}$, wobei

$$\mathfrak{M} = \Delta^{(n)} . \mathfrak{H}^{(n)} - \mathfrak{K}^{(n)}$$

und

$$\mathfrak{K}^{(n)} = \begin{pmatrix} k^{(n)}_{11}, & k^{(n)}_{12}, & \ldots, & k^{(n)}_{1n-1} \\ k^{(n)}_{21}, & k^{(n)}_{22}, & \ldots, & k^{(n)}_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k^{(n)}_{n-1,1}, & k^{(n)}_{n-1,2}, & \ldots, & k^{(n)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} h^{(n)}_{11}, & h^{(n)}_{12}, & \ldots, & h^{(n)}_{1n-1} \\ h^{(n)}_{21}, & h^{(n)}_{22}, & \ldots, & h^{(n)}_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h^{(n)}_{n-1,1}, & h^{(n)}_{n-1,2}, & \ldots, & h^{(n)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$k^{(n)}_{ij} = h^{(n)}_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i-j| > 1$$

$$h^2 . k^{(n)}_{ij} = -\tilde{r}_{\frac{i+j}{2}}, \quad h^{(n)}_{ij} = \sigma^{(n)}_{\frac{i+j}{2}} \quad \text{für} \quad |i-j| = 1$$

$$k^{(n)}_{ii} . h^2 = \tilde{r}_{i+1/2} + \tilde{r}_{i-1/2} - h^2 . \tilde{q}_i; \quad h^{(n)}_{ii} = -\sigma^{(n)}_{i-1/2} - \sigma^{(n)}_{i+1/2} + \tilde{p}_i$$

ist. Die Matrizen $\mathfrak{K}^{(n)}$ und $\mathfrak{H}^{(n)}$ sind symmetrisch. Die Gleichung

$$\| \mathfrak{K}^{(n)} - \Delta^{(n)} . \mathfrak{H}^{(n)} \| = 0 \tag{19}$$

hat dann und nur dann den Grad $n-1$, wenn die Determinante $\| \mathfrak{H}^{(n)} \|$ nicht verschwindet. Dafür ist hinreichend, daß die quadratische Form

$$H^{(n)}(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h^{(n)}_{ij} . u_i u_j = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i . \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1/2} \Delta u_{i-1}); \; u_0 = u_n = 0$$

definit ist. Beim normalen Verfahren ist sie stets positiv definit. Die Form läßt sich durch partielles Summieren der zweiten Summe rechts in die Gestalt

$$H^{(n)}(u,u) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i . u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma^{(n)}_{i-1/2} (\Delta u_{i-1})^2; \quad u_0 = u_n = 0$$

überführen. Wir schreiben jetzt weiterhin

$$\sigma^{(n)} = \frac{1 + \operatorname{sgn} \sigma^{(n)}}{2} \cdot \sigma^{(n)}, \quad \underset{-}{\sigma}^{(n)} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \sigma^{(n)}}{2} \cdot \sigma^{(n)}; \quad \sigma^{(n)} = \overset{+}{\sigma}^{(n)} + \underset{-}{\sigma}^{(n)}$$

und finden danach die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i . u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \underset{-}{\sigma}^{(n)}_{i-1/2} (\Delta u_{i-1})^2 \geqq H^{(n)}(u,u) \geqq \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i . u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\sigma}^{(n)}_{i-1/2} (\Delta u_{i-1})^2.$$

Wegen

$$(\Delta u_{i-1})^2 \leqq 2\,u_{i-1}^2 + 2\,u_i^2$$

kann man hieraus die weiteren Ungleichungen

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{p}_i - 2\,\underset{-}{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underset{-}{\sigma}_{i+1/2}^{(n)})\,u_i^2 \geqq H^{(n)}(u,u) \geqq \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{p}_i - 2\,\underset{+}{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underset{+}{\sigma}_{i+1/2}^{(n)})\,u_i^2$$

ableiten. Nun ist wegen (5″) und (5‴)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{p} = p; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)} = \sigma$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Daraus ergibt sich die Existenz einer von n unabhängigen positiven Konstanten C_4, welche die Abschätzung

$$(21)\quad C_4 \leqq \tilde{p}_i - 2\,\underset{-}{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underset{-}{\sigma}_{i+1/2}^{(n)}$$

ermöglicht. Ist ferner

$$(22)\quad p - 4\,\sigma \geqq 2\,C_5 > 0,$$

so ist für fast alle n

$$(23)\quad \tilde{p}_i - 2\,\underset{+}{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underset{+}{\sigma}_{i+1/2}^{(n)} > C_5.$$

Fassen wir (20), (21), (23) zusammen, so finden wir

$$(24)\quad C_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 \leqq H^{(n)}(u,u) \geqq C_5 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2.$$

Die Form $H^{(n)}(u,u)$ ist also für fast alle n positiv definit, so daß für hinreichend großes n oder hinreichend kleine Schrittweite h genau $n-1$ Differenzeneigenwerte existieren, die nach § 1/2 sämtlich reell sind, wenn $H^{(n)}(u,u)$ definit ist. Der Voraussetzung (22), die dies erzwingt, kann man auch die Form

$$(22')\quad p - 4\,\sigma > 0$$

geben. Sie soll für alles folgende erfüllt sein. Auf das normale Verfahren trifft sie stets zu. Es mag sein, daß wir mit (22′) eine stärkere Bedingung einführen, als sie zur Abschätzung (24) notwendig ist. Immerhin läßt sich zeigen, daß es unter den Formen $H^{(n)}(u,u)$ beliebig viele indefinite gibt, wenn auch nur für eine Stelle x die Ungleichung

$$p - 4\,\sigma < 0$$

zutrifft. Auf den Beweis dafür gehe ich nicht ein.

Es existiert eine Zahl $N > 0$ von der Beschaffenheit, daß die Formen $H^{(n)}(u,u)$ für $n \geqq N$ dem rechten Teil der Abschätzung (24) unterliegen und somit positiv definit sind. Das schließt nicht aus, daß es auch für $n < N$ positiv definite Formen gibt. Die Zahl N wird im folgenden eine wesentliche Rolle spielen.

§ 3.

Extremalsätze über die Differenzeneigenwerte.

Wir beziehen jetzt noch die Form

$$K^{(n)}(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij}^{(n)} u_i u_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2}\left(\frac{\Delta u_{i-1}}{h}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i u_i^2; \quad u_0 = u_n = 0$$

in unsere Betrachtungen ein. Unsere Differenzengleichungen können wir auch in der Form

$$\sum_{i=1}^{n-1} (k_{ij}^{(n)} - \Lambda^{(n)} . h_{ij}^{(n)}) F_i = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

schreiben und jetzt lehrt ein Vergleich mit Formel (11) des § 1, daß die Differenzeneigenwerte nichts anderes sind als die zu den Formen $K^{(n)}(u,u)$ und $H^{(n)}(u,u)$ gehörigen Extremwerte. Wir können daher alle in § 1/2 zusammengestellten Ergebnisse übernehmen, wenn wir dort K durch $K^{(n)}$, H durch $H^{(n)}$ und ϱ durch $\Lambda^{(n)}$ ersetzen. Die in § 1 vorausgesetzte Eigenschaft von H, positiv definit zu sein, wird bei fast allen Formen $H^{(n)}(u,u)$ durch (22′) erzwungen. Von nun ab betrachten wir in diesem und allen folgenden Paragraphen nur noch Differenzengleichungen, denen eine positiv definite Form $H^{(n)}(u,u)$ zugrunde liegt.

Durch den Vergleich mit § 1/2 ergeben sich folgende Sätze:

Satz 1. Es existieren $(n-1)$ Differenzeneigenwerte

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \Lambda_{n-1}^{(n)}$$

zur Schrittweite h. Es lassen sich korrespondierende Differenzeneigenlösungen

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

so bestimmen, daß sie paarweise die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{n,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} . F_i^{(n,k)} . F_j^{(n,m)} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq m$$

erfüllen.

Für alles folgende denken wir uns die Differenzeneigenlösungen so beschaffen, daß sie dem Satz 1 genügen.

Satz 2. Der Differenzeneigenwert $\Lambda_k^{(n)}$ ist der kleinste Wert, den der Quotient

$$J^{(n)}(u,u) = \frac{K^{(n)}(u,u)}{H^{(n)}(u,u)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$H^{(n)}(u, F^{(n,s)}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} u_i F_j^{(n,s)} = 0; \quad s = 1, 2, \ldots, k-1$$

annimmt. Er wird für $u_i = F_i^{(n,k)}$ erreicht.

Satz 3. $\Lambda_k^{(n)}$ ist der größte Wert, den das unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} u_i = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, k-1$$

gebildete Minimum von $J^{(n)}$ als Funktion der Parameter α_{ji} annimmt.

§ 4.

Ein Beispiel zum normalen Verfahren.

Wir setzen $r \equiv p \equiv 1$; $q \equiv 0$; $b - a = L$. Dann nimmt (1) die Form

$$y'' + \lambda . y = 0$$

an. Die k-te Eigenfunktion hat die (unnormierte) Form

$$y_k = \sin \frac{(x-a)\, k\pi}{L},$$

und der zugehörige Eigenwert λ_k beträgt

$$\lambda_k = k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Die Differenzengleichungen (4) schreiben sich

$$\Delta \Delta F_{i-1} + h^2 . \Lambda^{(n)} F_i = 0.$$

Es läßt sich ohne weiteres

$$F_i^{(n,k)} = y_k(x_i),$$

$$\Lambda_k^{(n)} = 2\, h^{-2} \left(1 - \cos \frac{\pi k h}{L}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi k h}{2L}}{\frac{\pi k h}{2L}} \right)^2 \tag{26}$$

bestätigen. Wir können auch

$$\Lambda_k^{(n)} = \lambda_k \cdot \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2, \quad \vartheta = \frac{\pi . kh}{2L}$$

setzen. Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ist stets $0 < \vartheta < \pi/2$. Mithin ist

$$\frac{4}{\pi^2} < \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2 < 1.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\frac{4}{L^2} k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \leqq \frac{\pi^2}{L^2} k^2. \tag{27}$$

Es ist ferner

$$J^{(n)}(u, u) = J_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta u_{i-1})^2}{h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2}.$$

Die Zahlen (26) sind also zugleich die Extremalwerte der speziellen Funktion $J_0(u, u)$.

§ 5.

Abschätzungen der Differenzeneigenwerte.

Wir schreiben

$$J^{(n)}(u,u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2}\left(\frac{\Delta u_{i-1}}{h}\right)^2}{H^{(n)}(u,u)} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i u_i^2}{H^{(n)}(u,u)}.$$

Nun ist wegen (5″)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{r} = r; \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{q} = q$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Es gibt also eine Zahl $N_1 \geqq N$, so daß

$$\frac{C_1}{2} \leqq \tilde{r} \leqq 2\,C_2; \quad |\tilde{q}| \leqq 2\,C_2; \quad \text{für } n \geqq N_1 \tag{28}$$

gesetzt werden kann. Mit Hilfe von (24) und (28) können wir $J^{(n)}(u,u)$ in der Form

$$-\frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{C_1}{2\,C_4} J_0 \leqq J^{(n)}(u,u) \leqq \frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{2\,C_2\,\pi^2}{C_5} \cdot J_0$$

abschätzen. Dabei ist J_0 die in § 4 eingeführte Funktion. Unter Benutzung von (27) und unter Anwendung der Majorantenabschätzung des § 1/2 ergibt sich

$$-\frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{4\,C_1}{2\,C_4 L^2} k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \leqq \frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{2\,C_2}{C_5 L^2} \pi^2 k^2, \quad n \geqq N_1.$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$-C_8 + C_7 k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \leqq C_6 k^2 \tag{29}$$
$$n \geqq N_1$$

mit lauter positiven, von n und k unabhängigen Konstanten C_6, C_7, C_8. Die Abschätzung (29) gilt indes ohne die Einschränkung, welcher die Zahl n in (28) unterworfen ist. Es kann nämlich höchstens endlich viele Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ für $n < N_1$ geben. Diese können am Charakter der Abschätzung (29) nichts ändern, wenn sie — gegebenenfalls unter Abänderung der Konstanten — darin einbezogen werden. Nur eine andere Fassung der Abschätzung ist der

Hilfssatz 2. Die Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ unterliegen den Abschätzungen

$$\Lambda_k^{(n)} \leqq C_6 k^2; \quad C_9 k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0,$$

worin C_6, C_9 und k_0 lauter positive, von n und k unabhängige Konstanten bedeuten.

§ 6.

Abschätzungen der Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Es sei $n \geqq N_1$. Die Differenzeneigenlösungen sind bis auf einen konstanten Faktor unbestimmt. Wir normieren sie nunmehr durch die Bedingung

$$(30) \qquad h \,.\, H^{(n)}(F^{(n,k)}, F^{(n,k)}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} \,.\, F_j^{(n,k)} h = 1.$$

Das bedeutet nach S. 432, Zeile 5 von unten

$$(30') \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i F_i^{(n,k)2} \,.\, h - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} (\Delta F_{i-1}^{(n,k)})^2 h = 1.$$

Sie sind dann immer noch bis auf den Faktor ± 1 unbestimmt. Auch diesen Mangel werden wir später beseitigen. Aus (30) folgt

$$(30'') \qquad \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i \,.\, F_i^{(n,k)2} \,.\, h = \Lambda_k^{(n)}$$

und hieraus ergibt sich wegen (28)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 h \leqq \frac{2}{C_1} \Lambda_k^{(n)} + \frac{4\,C_2}{C_1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)2} \,.\, h.$$

Ferner folgt aus (30) und (24)

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)2} \,.\, h \leqq \frac{1}{C_5}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes 2 und (31) dürfen wir jetzt schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 h \leqq \frac{2}{C_1} \cdot \left(C_6 k^2 + \frac{2\,C_2}{C_5}\right)$$

oder auch

$$(32) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 h \leqq C_{10} \,.\, k^2$$

mit einer von n und k unabhängigen Konstanten C_{10}. Mit Bezug auf die in § 1/3 definierte Ableitung einer Polygonfunktion schreiben wir ferner

$$F^{(n,k)}(x'') - F^{(n,k)}(x') = \int_{x'}^{x''} F^{(n,k)\prime} \,.\, dx, \quad x' < x'',$$

und wenden darauf die Schwarzsche Ungleichung an. Wir erhalten

$$|F^{(n,k)}(x'') - F^{(n,k)}(x')|^2 \leqq (x'' - x') \,.\, \int_{x'}^{x''} F^{(n,k)\prime 2} \,.\, dx \leqq (x'' - x') \,.\, \int_{a}^{b} F^{(n,k)\prime 2} \,.\, dx$$

$$(33) \qquad = (x'' - x') \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \cdot h \leqq (x'' - x') \cdot C_{10} k^2.$$

Hieraus geht hervor, daß alle Polygonfunktionen $F_{(x)}^{(n,k)}$ bei festem k gleichgradig stetig sind. Ferner folgt aus (33), wenn wir $x' = a$ setzen, daß die Polygonfunktionen $F_{(x)}^{(n,k)}$ bei festem k auch gleichmäßig beschränkt sind. Da man aus einer Folge gleichgradig stetiger und dem Betrage nach gleichmäßig beschränkter Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aussondern kann, gilt der

Hilfssatz 3. Aus der Folge $F^{(n,k)}$ kann man bei festem k eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aussondern.

Der vorstehende Beweis für die gleichgradige Stetigkeit der Polygonfunktionen $F^{(n,k)}$ geht im wesentlichen auf R. Courant[8]) zurück.

Wir wenden jetzt die Schwarzsche Ungleichung auf die Relation

$$F_i^{(n,k)2} = \sum_{\nu=0}^{i-1} \Delta F_\nu^{(n,k)} \cdot h^{-1} \cdot (F_\nu^{(n,k)} + F_{\nu+1}^{(n,k)}) h; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

an und erhalten

$$F_i^{(n,k)4} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} h \cdot \left(\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} (F_\nu^{(n,k)} + F_{\nu+1}^{(n,k)})^2 h$$

$$\leqq 4 \sum_{\nu=1}^{n} h \left(\frac{\Delta F_{\nu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} F_\nu^{(n,k)2} \cdot h,$$

woraus unter Berücksichtigung von (31) und (32)

$$F^{(n,k)4}(x) \leqq 4 \frac{C_{10}}{C_5} k^2 \quad \text{oder} \quad |F^{(n,k)}| \leqq C_{11} k^{1/2}$$

mit einer von n, k und x unabhängigen Konstanten C_{11} folgt.

Hilfssatz 4. Es besteht die Abschätzung $|F^{(n,k)}| \leqq C_{11} \cdot \sqrt{k}$ mit einer von n, k und x unabhängigen Konstanten C_{11}.

Für spätere Anwendungen benötigen wir den folgenden Hilfssatz, der sich ergibt, wenn man die darin vorkommenden Summen mittels der Schwarzschen Ungleichung und der Ungleichungen (31), (32) abschätzt.

Hilfssatz 5. Liegen die Zahlen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ dem Betrage nach unterhalb einer positiven Zahl Φ, so bestehen die Abschätzungen

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)} \cdot \Phi_i \cdot h\right| \leqq C_{12} \cdot \Phi; \quad \left|\sum_{i=0}^{n-1} \Delta F_i^{(n,k)} \cdot \Phi_i\right| \leqq C_{13} \cdot k \Phi$$

mit von n und k unabhängigen Konstanten C_{12} und C_{13}.

Wir knüpfen jetzt an unsere Differenzengleichung (5) an, die nach (5″) und (17) in der Gestalt

$$\Delta\left(\tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h^2}\right) + (A_k^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i^{(n,k)} + A_k^{(n)} \Delta (\sigma_{i-1/2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}) = 0$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung multiplizieren wir mit dem Faktor

$$\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)}$$

und summieren danach über $i = \mu, \mu + 1, \ldots, \nu$. Wir erhalten

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2} \cdot \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 - \left(\tilde{r}_{\mu-1/2} \cdot \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$= -\sum_{i=\mu}^{\nu} (A_k^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i^{(n,k)} \cdot (\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)})$$

$$- A_k^{(n)} \sum_{i=\mu}^{\nu} \Delta (\sigma_{i-1/2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}) (\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)}).$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\nu}^{(n,k)}}{h}\right)^2-\left(\tilde{r}_{\mu-1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$=-\sum_{i=\mu}^{\nu}(A_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i)\,\tilde{r}_i\,F_i^{(n,k)}(F_{i+1}^{(n,k)}-F_{i-1}^{(n,k)})+R_1,$$

$$R_1=-\sum_{i=\mu}^{\nu}A_k^{(n)}\cdot\Delta(\sigma_{i-1/2}^{(n)}\Delta F_{i-1}^{(n,k)})\,(\tilde{r}_{i+1/2}\cdot\Delta F_i^{(n,k)}+\tilde{r}_{i-1/2}\cdot\Delta F_{i-1}^{(n,k)})$$

$$-\sum_{i=\mu}^{\nu}(A_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i)\,F_i^{(n,k)}\cdot\{(\tilde{r}_{i+1/2}-\tilde{r}_i)\cdot\Delta F_i^{(n,k)}+(\tilde{r}_{i-1/2}-\tilde{r}_i)\,\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\}.$$

Eine weitere Umformung durch partielles Summieren liefert

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\nu}^{(n,k)}}{h}\right)^2-\left(\tilde{r}_{\mu-1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \tag{34}$$

$$=-(A_k^{(n)}\cdot\tilde{p}_\nu+\tilde{q}_\nu)\,\tilde{r}_\nu F_\nu^{(n,k)}F_{\nu+1}^{(n,k)}+(A_k^{(n)}\tilde{p}_\mu+\tilde{q}_\mu)\,\tilde{r}_\mu\cdot F_\mu^{(n,k)}F_{\mu-1}^{(n,k)}+R_2,$$

$$R_2=R_1+\sum_{i=\mu}^{\nu-1}F_i^{(n,k)}\cdot F_{i+1}^{(n,k)}\cdot\Delta[(A_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i)\,\tilde{r}_i]\text{ für }\nu>\mu\text{ und }R_2=R_1\text{ für }\nu=\mu.$$

Nun existiert gewiß eine von n und k unabhängige positive Konstante C_{14}, so daß auf Grund der Voraussetzungen über r, p, q, $\tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}$ und wegen des Hilfssatzes 2

$$|A_k^{(n)}\sigma^{(n)}|_{\max}\cdot|\tilde{r}|\leqq C_{14}\cdot k^2$$

$$|\tilde{r}_{i\pm1/2}-\tilde{r}_i|\cdot|A_k^{(n)}\cdot\tilde{p}+\tilde{q}|_{\max}\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot h$$

$$|\Delta([A_k^{(n)}\cdot\tilde{p}_i+\tilde{q}_i]\,\tilde{r}_i)|\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot h$$

geschrieben werden darf. Demnach gilt

$$|R_2|\leqq C_{14}k^2\cdot\sum_{i=\mu}^{\nu}\{(|\Delta F_i^{(n,k)}|+|\Delta F_{i-1}^{(n,k)}|)^2+$$

$$+|F_i^{(n,k)}|\cdot(|\Delta F_i^{(n,k)}|+|\Delta F_{i-1}^{(n,k)}|)\cdot h+|F_i^{(n,k)}\cdot F_{i+1}^{(n,k)}|\cdot h\}.$$

Indem wir die rechte Seite unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung abschätzen, erhalten wir

$$|R_2|\leqq C_{14}\cdot k^2\Big\{\sum_{i=1}^{n}4\,(\Delta F_{i-1}^{(n,k)})^2+$$

$$+2\,h\Big(\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(n,k)}\cdot h\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\Big)^2h\Big]^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(n,k)^2}\cdot h\Big\}.$$

Nehmen wir jetzt (31) und (32) zu Hilfe, so können wir die rechte Seite und damit $|R_2|$ wie folgt abschätzen:

$$|R_2|\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot\Big\{4\,C_{10}\cdot k^2\cdot h+2\Big(\frac{C_{10}}{C_5}\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot k\,h+\frac{1}{C_5}\Big\}.$$

Wegen $kh \leqq b-a$ ist demnach

$$|R_2| \leqq C_{15} \cdot k^3,$$

wobei $C_{15} > 0$ von n und k nicht abhängt. Für mindestens einen der in (32) unter dem Summenzeichen stehenden Differenzenquotienten muß eine Abschätzung von der Form

$$\left| \frac{\Delta F_{j-1}^{(n,k)}}{h} \right| \leqq C_{16} k$$

bestehen, wobei C_{16} von n und k nicht abhängt. Der Index j sei dadurch gekennzeichnet. Indem wir in (34) ein erstes Mal $\mu = j$, ein zweites Mal $\nu = j-1$ setzen und den Hilfssatz 4 benutzen, erhalten wir zwei Abschätzungen von der Form

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2} \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{17} k^3 \text{ für } \nu \geqq j, \qquad \left(\tilde{r}_{\mu-1/2} \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{17} k^3 \text{ für } \mu \leqq j,$$

wobei $C_{17} > 0$ von n und k nicht abhängt. Nun ist nach (28)

$$2\tilde{r} \geqq C_1.$$

Demnach haben wir

$$\left(\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq 4 \cdot \frac{C_{17}}{C_1^2} k^3 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

und daraus folgt der

Hilfssatz 6. Es existiert eine von n und k unabhängige Konstante $C_{18} > 0$, welche die Abschätzung

$$\left| \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h} \right| \leqq C_{18} \cdot k^{3/4} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1$$

ermöglicht.

Die Aussage dieses Hilfssatzes läßt sich für $\nu = 0$ und $\nu = n-1$ noch verschärfen. Wir betrachten, indem wir $A^{(n)} = A_k^{(n)}$ setzen, die Funktion

$$\bar{r} = r + h^2 \cdot (A_k^{(n)} \cdot \sigma^{(n)} + \tau^{(n)}).$$

Der Ausdruck $|h^2 \cdot A_k^{(n)}|$ liegt unterhalb einer von n und k nicht abhängigen Schranke. Das gleiche gilt für die von n und k abhängige Funktion $|\bar{r}(x)|$, da insbesondere die Funktionen $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen σ und τ konvergieren. Wir formulieren jetzt noch zwei Voraussetzungen über die Funktionen $\sigma_{(x)}^{(n)}$.

α) Die Funktionen $\sigma^{(n)}(s)$ besitzen Differenzenquotienten, die dem Betrage nach gleichmäßig in n und in den Argumenten beschränkt sind.

β) Es gibt eine von n unabhängige Zahl $\varkappa > 0$, so daß im Falle $\sigma(a) \neq 0$ weder $-\frac{r(a)}{\sigma(a)}$, noch $-\frac{r(b)}{\sigma(b)}$ im Falle $\sigma(b) \neq 0$ ein Häufungswert der Zahlen $h^2 \cdot A_k^{(n)}$ für $k \geqq \varkappa$ ist.

Die Bedingung α) hat zur Folge, daß auch $\bar{r}$ dem Betrage nach gleichmäßig in n, k und in den Argumenten beschränkte Differenzenquotienten besitzt. Aus der Eigenschaft β) folgt die Existenz einer

von n und k unabhängigen Zahl $C_{19} > 0$ sowie einer gleichfalls von n und k unabhängigen Zahl $N_2 \geqq N_1$, so daß

$$|r(a) + h^2 \,.\, \Delta_k^{(n)} \,.\, \sigma(a)| \geqq 2\, C_{19}; \quad |r(b) + h^2 \,.\, \Delta_k^{(n)} \,.\, \sigma(b)| \geqq 2\, C_{19}$$

für $n \geqq N_2$ gilt. Daraus ergibt sich die Existenz einer weiteren von n und k unabhängigen Zahl $N_3 \geqq N_2$, so daß

$$|\bar{r}_{1/2}| \geqq C_{19}; \qquad |\bar{r}_{n-1/2}| \geqq C_{19} \quad \text{für} \quad n \geqq N_3 \tag{35}$$

geschrieben werden darf. Für $n \geqq N_3$ entwickeln wir jetzt eine zu (34) analoge Formel, indem wir von den Gleichungen (5)

$$\Delta(\bar{r}_{i-1/2}\, \Delta F_{i-1}^{(n,k)}) + h^2 \,.\, (\Delta_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i)\, F_i^{(n,k)} = 0$$

ausgehen. Wir können die Zwischenstufen überspringen und sogleich schreiben

$$\left(\bar{r}_{\nu+1/2} \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 - \left(\bar{r}_{\mu-1/2} \cdot \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$= -\bar{r}_\nu (\Delta_k^{(n)} \tilde{p}_\nu + \tilde{q}_\nu) \,.\, F_{\nu+1}^{(n,k)} \,.\, F_\nu^{(n,k)} + \bar{r}_\mu (\Delta_k^{(n)} \tilde{p}_\mu + \tilde{q}_\mu)\, F_{\mu-1}^{(n,k)} F_\mu^{(n,k)} + R_3,$$

$$R_3 = -\sum_{i=\mu}^{\nu} (\Delta_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i)\, F_i^{(n,k)} \,.\, \{(\bar{r}_{i+1/2} - \bar{r}_i) \,.\, \Delta F_i^{(n,k)} + (\bar{r}_{i-1/2} - \bar{r}_i) \,.\, \Delta F_{i-1}^{(n,k)}\} +$$

$$+ \sum_{i=\mu}^{\nu-1} F_i^{(n,k)} \,.\, F_{i+1}^{(n,k)} \,.\, \Delta[(\Delta_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) \,.\, \bar{r}_i]\, \delta_{\mu\nu}; \tag{36}$$

$$\delta_{\mu\nu} = 1 \quad \text{für} \quad \nu > \mu; \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = \mu.$$

Für $|R_3|$ kann man die Abschätzung

$$|R_3| \leqq C_{20} \,.\, k^2$$

finden. Die Konstante $C_{20} > 0$ hängt von μ, ν, n und k nicht ab. Indem wir die Abkürzung

$$X_\nu = \left(\bar{r}_{\nu+1/2} \cdot \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 + \bar{r}_\nu \,.\, (\Delta_k^{(n)} \,.\, \tilde{p}_\nu + \tilde{q}_\nu) \,.\, F_\nu^{(n,k)} \,.\, F_{\nu+1}^{(n,k)}$$

benutzen, können wir aus (36) und der Abschätzung von R_3 die Relation

$$X_\nu = X_0 + \vartheta_\nu \,.\, C_{20} k^2, \quad |\vartheta_\nu| \leqq 1 \tag{37}$$

ableiten. Die Größe X_0 besitzt höchstens die Größenordnung von k^2. Man erkennt dies, indem man (37) über alle Indizes $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ summiert und danach die Relationen (31), (32) und die Schwarzsche Ungleichung anwendet. Somit dürfen wir

$$X_0 = \left(\bar{r}_{1/2} \cdot \frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{21} k^2$$

oder unter Benutzung von (35)

$$\left(\frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq \frac{C_{21} k^2}{C_{19}^2} \quad \text{für} \quad n \geqq N_3$$

schreiben. Dabei ist C_{21} eine von n und k nicht abhängige Konstante. Entsprechendes läßt sich für $\nu = n-1$ ableiten. Somit gilt der

Hilfssatz 7. Unter den Voraussetzungen α) und β) ist für $\nu = 0$, $\nu = n-1$

$$\left|\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right| \leqq C_{22} k \quad \text{für} \quad n \geqq N_2,$$

wobei die Konstante C_{22} von n und k nicht abhängt.

Die Voraussetzung β) und damit eine der Voraussetzungen dieses Hilfssatzes ist immer dann erfüllt, wenn $\sigma(x)$ wesentlich positiv ist. Wegen des Hilfssatzes 2 können sich nämlich die Zahlen $h^2 . \Lambda_k^{(n)}$ für hinreichend große Werte von k nur gegen positive Zahlen häufen.

Sämtliche Hilfssätze dieses Paragraphen sind unter gewissen Einschränkungen für n bewiesen worden. Ihrem Wesen nach gelten sie aber ohne jede solche Einschränkung, wenn nur die zugehörige Form $H^{(n)}(u,u)$ positiv definit ist (nur für soche n haben wir die Polygonfunktionen $F^{(n,k)}$ erklärt). Es existieren nämlich höchstens endlich viele Zahlen $F_i^{(n,k)}$ für $n < N_2$, und diese können, gegebenenfalls unter Abänderung der Konstanten, in alle Hilfssätze einbezogen werden. Für die Anwendungen der Hilfssätze benutzen wir

$$C = \operatorname{Max}(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{18}, C_{22})$$

statt einer der rechts stehenden Konstanten.

§ 7.

Entwicklung von Polygonfunktionen nach den Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)} . F_i^{(n,k)} = z_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

besitzt genau eine Lösung für die Unbekannten $d_k^{(n)}$, da wegen (30) die Determinantengleichung

$$\|h . F_i^{(n,k)}\| . \|\sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_j^{(n,k)}\| = 1$$

besteht, aus welcher

$$\|F_i^{(n,k)}\| \neq 0$$

folgt. Die Lösung hat die Form

$$(38') \qquad d_k^{(n)} = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} z_i . F_j^{(n,k)} . h = h . H^{(n)}(z, F^{(n,k)}).$$

Gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem ist die Schreibweise

$$(38) \qquad z(x) = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)} . F^{(n,k)}(x),$$

worin $z(x)$ eine n-teilige, den Randbedingungen $z(a) = z(b) = 0$ genügende Polygonfunktion ist. Es stellt (38) eine Entwicklung dieser Polygonfunktion nach den Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen mit den in (38′) angegebenen Koeffizienten dar.

Die Formel (38′) läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (vgl. § 3)

$$\sum_{i=1}^{n-1} (k_{ij}^{(n)} - \Lambda_k^{(n)} h_{ij}^{(n)}) \, . \, F_i^{(n,k)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

auf eine neue Gestalt bringen. Wir multiplizieren die Gleichung des Index j mit z_j und summieren danach alle Gleichungen. Man erhält

$$(39) \qquad \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} \, . \, z_j = \Lambda_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} z_j = d_k^{(n)} \, . \, \Lambda_k^{(n)} \frac{1}{h}$$

oder (vgl. auch (30″))

$$(39') \quad d_k^{(n)} \, . \, \Lambda_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \cdot h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i F_i^{(n,k)} \, . \, z_i \, . \, h; \; z_0 = z_n = 0$$

oder schließlich

$$(39'') \quad \begin{aligned} d_k^{(n)} \, . \, \Lambda_k^{(n)} = {} & \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i F_i^{(n,k)} \, . \, z_i h + \\ & + z_1 \tilde{r}_{1/2} \frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h} - z_{n-1} \tilde{r}_{n-1/2} \frac{\Delta F_{n-1}^{(n,k)}}{h} \, . \end{aligned}$$

Es sei nun

$$|z(x)| \leqq Z; \quad |\Delta z_i| \leqq Z h, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Sind nun die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt, so folgt aus den Hilfssätzen 2, 5, 7 eine Abschätzung von der Form

$$(40) \qquad |d_k^{(n)}| \leqq \frac{Z C_{23}}{k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0,$$

worin die Konstante C_{23} von n und k nicht abhängt. Ohne die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 gilt (40), wenn

$$|z(x)| \leqq Z; \qquad \left| \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \right| \leqq Z \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

geschrieben werden darf, wenn also alle Differenzenquotienten von z in die Abschätzung einbezogen sind.

Aus dem Satz 1 und (38) ergibt sich die Formel

$$(41) \qquad h \, . \, H^{(n)}(z, z) = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2}.$$

Wir machen jetzt von den Formeln (40) und (41) eine wichtige Anwendung. Wir setzen $z_i = y_{\mu i}$, wobei y_μ die μ-Eigenfunktion des Eigenwertproblems ist. Es ist gemäß (7), (7′) des § 1/1

$$|y_\mu| \leqq Y \leqq \mu Y; \quad |\Delta y_{\mu i-1}| \leqq h \mu Y; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Also dürfen wir (40) in der Form

$$|d_k^{(n)}| \leqq \frac{\mu Y C_{23}}{k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0 \tag{40'}$$

anwenden. Aus (41) folgt (vgl. S. 11)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i y_{\mu i}^2 h - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} (\Delta y_{\mu i-1})^2 h = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $\tilde{p}$ und $\sigma^{(n)}$ mit wachsendem n folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2} = \int_a^b p\, y_\mu^2\, dx = 1. \tag{42}$$

Aus (40') folgt die Existenz einer von n unabhängigen Zahl $\nu \geqq k_0$, so daß

$$\sum_{k=\nu}^{n-1} d_k^{(n)2} < 1/4 \quad \text{für} \quad n > \nu$$

und somit wegen (42)

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} d_k^{(n)2} \geqq 1/4$$

geschrieben werden darf. Ist nun $n_1, n_2, \ldots, n_j \ldots$ eine vorgegebene Teilfolge der natürlichen Zahlen, so existiert ein Index $\mu' \leqq \nu$, so daß

$$\limsup_{n_j\to\infty} |d_{\mu' k}^{(n_j)}| \neq 0$$

ist. Zur schärferen Kennzeichnung der Entwicklungskoeffizienten der n-teiligen Polygonfunktion $y_\mu^{(n)}(x)$ setzen wir $d_k^{(n)} = d_{\mu k}^{(n)}$. Die Entwicklung (38) lautet dann

$$y_\mu^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} F^{(n,k)}(x). \tag{38'}$$

Unser letztes Ergebnis erhält die Form von

Hilfssatz 8. Zu jeder natürlichen Zahl μ und jeder vorgegebenen Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$ der natürlichen Zahlen läßt sich mindestens eine natürliche Zahl μ' finden, so daß

$$\limsup_{j\to\infty} |d_{\mu\mu'}^{(n_j)}| \neq 0$$

ist.

§ 8.

Der Hauptkonvergenzsatz.

Für die Eigenfunktion y_μ gilt

$$(r y_\mu')_i' + (\lambda_\mu p_i + q_i) y_{\mu i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Daraus gewinnen wir

$$\lambda_\mu \{\tilde{p}_i y_{\mu i} + \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1/2} \Delta y_{\mu i-1})\} = h^2(\lambda_\mu \xi^{(n)}_i + \xi^{(n)}_i) y_{\mu i} - \tilde{q}_i y_{\mu i} - (r y'_\mu)'_i + \\ + \lambda_\mu . \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1/2} \Delta y_{\mu i-1}).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $h F^{(n,\nu)}_i$, summieren über alle i und erhalten unter teilweiser Anwendung partiellen Summierens

$$\lambda_\mu d^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi^{(n)}_i + \xi^{(n)}_i) y_{\mu i} . F^{(n,\nu)}_i . h - \lambda_\mu h^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^{(n)}_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} \tag{43}$$
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i y_{\mu i} . F^{(n,\nu)}_i h - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i . F^{(n,\nu)}_i . h.$$

Aus (39′) fließt

$$A^{(n)}_\nu d^{(n)}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i y_{\mu i} F^{(n,\nu)}_i . h. \tag{39″}$$

Wir ziehen (39″) und (43) voneinander ab und erhalten

$$(\lambda_\mu - A^{(n)}_\nu) d^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 . \sum_{i=1}^{n-1} h(\lambda_\mu \xi^{(n)}_i + \xi^{(n)}_i) y_{\mu i} F^{(n,\nu)}_i - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i F^{(n,\nu)}_i . h \tag{44}$$
$$- h^2 . \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma^{(n)}_{i-1/2} + \tau^{(n)}_{i-1/2}) \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} = \omega^{(n)}_{\mu\nu}.$$

Wir setzen jetzt

$$A^{(n)}_{\mu\nu} = - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i F^{(n,\nu)}_i . h \tag{45}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} . r_{i-1/2} . \left\{ y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right\} - \sum_{i=1}^{n-1} F^{(n,\nu)}_i \left\{ (r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} \right\} h.$$

Hierbei geht die zweite Zeile unter Anwendung partiellen Summierens aus der ersten hervor. Ferner setzen wir

$$B^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 . \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi^{(n)}_i + \xi^{(n)}_i) y_{\mu i} F^{(n,\nu)}_i . h \tag{45′}$$
$$- h^2 . \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma^{(n)}_{i-1/2} + \tau^{(n)}_{i-1/2}) . \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} . \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1}.$$

Auf die geschweiften Klammern in (45) dürfen wir die Formel (15) aus § 1/3 anwenden und also schreiben

$$y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} = - h^2 . \frac{y'''_\mu(\delta_i)}{24}, \quad x_i \leqq \delta_i \leqq x_{i+1} \tag{46}$$
$$(r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} = - h^2 \frac{(r y'_\mu)'''(\varepsilon_i)}{24}, \quad x_{i-1/2} \leqq \varepsilon_i \leqq x_{i+1/2}.$$

Die Gleichungen (46) und Hilfssatz 5 liefern

$$|A^{(n)}_{\mu\nu}| \leqq h^2 . C_{24} . \nu. \tag{47}$$

Ferner gestattet der Hilfssatz 5 eine Abschätzung von $B_{\mu\nu}^{(n)}$ in der Form

$$|B_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^2 \cdot C_{25} \cdot \nu. \tag{48}$$

Die Konstanten C_{24} und C_{25} hängen von n und ν nicht ab. Eine Zusammenfassung von (44), (45), (45'), (47) und (48) ergibt

$$|\omega_{\mu\nu}^{(n)}| = |(\lambda_\mu - \Lambda_\nu^{(n)})\, d_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^2 \cdot \nu (C_{24} + C_{25}). \tag{49}$$

Auf Grund des Hilfssatzes 3 sondern wir jetzt aus der Folge $F^{(n,\nu)}(x)$ bei festem ν eine konvergente Teilfolge aus. Es sei

$$\lim_{j \to \infty} F^{(n_j,\nu)}(x) = F^{(\nu)}(x)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Dann ist $F^{(\nu)}$ stetig und genügt den Randbedingungen. Aus der Normierung der Polygonfunktionen und aus (32) ergibt sich

$$\int_a^b p\, F^{(\nu)2} \cdot dx = \lim_{j \to \infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{n_j - 1} \tilde{p}_i F_i^{(n_j,\nu)2} \cdot h - h \sum_{i=1}^{n_j} (\Delta F_{i-1}^{(n_j,\nu)})^2 \cdot \sigma_{i-1/2}^{(n)} \Big\} = 1. \tag{6'}$$

Also ist

$$F^{(\nu)}(x) \not\equiv 0.$$

Wegen der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen muß es mindestens einen Index μ geben, so daß

$$\int_a^b p\, F^{(\nu)} \cdot y_\mu\, dx \neq 0.$$

Dann ist auch der gewiß vorhandene Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{j \to \infty} d_{\mu\nu}^{(n_j)} &= \lim_{j \to \infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{n_j - 1} h \tilde{p}_i F_i^{(n_j,\nu)} \cdot y_{\mu i} - \sum_{i=1}^{n_j} h\, \sigma_{i-1/2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n_j,\nu)} \cdot \Delta y_{\mu i-1} \Big\} \\ &= \int_a^b p\, y_\mu F^{(\nu)} \cdot dx \end{aligned}$$

von Null verschieden. Für diesen Index ergibt sich aus (49)

$$\lim_{j \to \infty} \Lambda_\nu^{(n_j)} = \lambda_\mu.$$

Durch diese Relation ist aber μ eindeutig bestimmt. Es kann demnach nur eine Eigenfunktion y_μ geben, die mit $F^{(\nu)}$ einen nicht verschwindenden Fourierkoeffizienten bildet. Es muß daher $F^{(\nu)}$ bis auf einen konstanten Faktor mit y_μ übereinstimmen. Wegen der Gleichung (6'), die der Normierung (6) der Eigenfunktionen entspricht, kann dieser Faktor nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Es ist also

$$F^{(\nu)}(x) = \pm y_\mu(x).$$

Nach dem bekannten Diagonalverfahren von Cantor bestimmen wir eine über alle Grenzen wachsende Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$ der natürlichen

Zahlen in der Weise, daß die Konvergenz

$$\lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)}(x) = \pm y_{\nu'}(x)$$
$$\lim_{j\to\infty} \Delta_\nu^{(n_j)} = \lambda_{\nu'}$$

für jeden Wert von ν besteht. Für $\nu_1 < \nu_2$ ist $\Delta_{\nu_1}^{(n)} \leqq \Delta_{\nu_2}^{(n)}$ und also $\nu_1' \leqq \nu_2'$. Der Fall $\nu_1' = \nu_2'$ ist ausgeschlossen, weil sich sonst der Widerspruch

$$0 = \lim_{j\to\infty} H^{(n_j)}(F^{(n_j,\nu_1)}, F^{(n_j,\nu_2)}) \cdot h = \pm \int_a^b p\, y_{\nu_1'}^2 \cdot dx = \pm 1$$

ergeben würde. Also folgt aus $\nu_1 < \nu_2$ die Beziehung $\nu_1' < \nu_2'$. Unter den Zahlen ν' kommen alle natürlichen Zahlen vor. Wäre z. B. die Zahl μ nicht darunter vorhanden, so folgte aus (49)

$$\lim_{j\to\infty} d_{\mu\nu}^{(n_j)} = 0$$

für jeden Wert von ν im Gegensatz zum Hilfssatz 8. Also muß

$$\nu' = \nu; \quad \lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)} = \pm y_\nu; \quad \lim_{j\to\infty} \Delta_\nu^{(n_j)} = \lambda_\nu \tag{50}$$

sein. Die Funktion $F^{(n,\nu)}$ ist noch bis auf den Faktor ± 1 unbestimmt. Jetzt legen wir den Faktor in der Weise fest, daß

$$\int_a^b (y_\nu - F^{(n,\nu)})^2 \cdot dx \leqq \int_a^b (y_\nu + F^{(n,\nu)})^2 \cdot dx \tag{51}$$

sein soll. Sollte diese Festlegung nicht eindeutig sein, was nur im Falle des Gleichheitszeichens möglich ist, so bestimmen wir den Faktor auf irgendeine Weise. Aus (50) und (51) folgt nunmehr

$$\lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)} = y_\nu; \quad \lim_{j\to\infty} \Delta_\nu^{(n_j)} = \lambda_\nu,$$

und hieraus allgemein

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n,\nu)} = y_\nu; \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_\nu^{(n)} = \lambda_\nu, \tag{52}$$

davon die erste Konvergenzrelation im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. — Aus (49) und (52) kann man nunmehr das Resultat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mu\nu}^{(n)}}{h} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu; \quad \lim_{n\to\infty} d_{\mu\mu}^{(n)} = 1 \tag{53}$$

ohne weiteres gewinnen, das wir sogleich benutzen werden. Es ist

$$\frac{\Delta y_{\mu i}}{h} - d_{\mu\mu}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,\mu)}}{h} = \sum_{k=1}^{k_1-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} + \sum_{k=k_1}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h}, \quad n > k_1, \quad k \neq \mu,$$

wobei k_1 auf Grund des Hilfssatzes 2 so gewählt ist, daß

$$\Delta_k^{(n)} > C_0 k^2 > |\lambda_\mu| \quad \text{für} \quad k \geqq k_1 \geqq k_0$$

zutrifft. Dann folgt aus (49)

$$|d_{\mu k}^{(n)}| \leqq \frac{h^2 \cdot k\,(C_{24} + C_{25})}{C_9 \cdot k^2 - |\lambda_\mu|}, \quad k \geqq k_1. \tag{54'}$$

Wegen des Hilfssatzes 6 ist ferner

$$\left| d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{C \cdot k^{5/2} \cdot h^2\,(C_{24} + C_{25})}{C_9 k^2 - |\lambda_\mu|} \leqq \frac{C(b-a)^2 \cdot k^{1/2}(C_{24} + C_{25})}{C_9 k^2 - |\lambda_\mu|} \tag{54}$$

Wenn wir nunmehr eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgeben, können wir k_1 so groß wählen, daß

$$\left| \sum_{\substack{k=k_1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Das folgt unmittelbar aus (54). Andererseits können wir wegen (53) bei festem k_1 eine Zahl $N_4 > k_1$ so bestimmen, daß

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{k_1-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq N_4$$

und somit

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq N_4$$

ist. Nunmehr dürfen wir

$$\lim_{n \to \infty} (y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)\prime}) = 0$$

schreiben und diese Relation im Sinne gleichmäßiger Konvergenz lesen. Nach dem Hilfssatz 1 konvergieren aber die Funktionen $y_\mu^{(n)\prime}$ gleichmäßig gegen y_μ'. Diese Tatsache und (53) liefern im Verein mit der vorstehenden Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} F^{(n,\mu)\prime} = y_\mu'. \tag{55}$$

Wir kehren jetzt zu den Formeln (44) und (45) zurück. Unter Benutzung von (46), (52) und (55) erkennt man, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = B_{\mu\nu} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \xi)\, y_\mu \cdot y_\nu \, dx - \int_a^b (\lambda_\mu \sigma + \tau)\, y_\mu' y_\nu' \, dx$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = A_{\mu\nu} = \frac{1}{24} \int_a^b y_\nu (r y_\mu')''' \, dx - \frac{1}{24} \cdot \int_a^b y_\nu' \cdot r y_\mu''' \, dx \tag{56}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_\mu - A_\nu^{(n)}}{h^2} d_{\mu\nu}^{(n)} = \omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

existieren müssen. Wir fassen jetzt alles wesentliche im folgenden Satz zusammen.

Satz 4 (Hauptkonvergenzsatz). Im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n,\mu)} = y_\mu; \quad \lim_{n\to\infty} F^{(n,\mu)'} = y'_\mu,$$

und ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda_\mu - \Lambda_\nu^{(n)})}{h^4} d_{\mu\nu}^{(n)} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta) y_\mu y_\nu \, dx - \int_a^b (\lambda_\mu \sigma + \tau) y'_\mu y'_\nu \, dx$$

$$- \frac{1}{24} \int_a^b \{y'_\nu r y'''_\mu - y_\nu (r y'_\mu)'''\} \, dx = \omega_{\mu\nu}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)}}{h^2} = \omega_{\mu\mu}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\lambda_\mu - \lambda_\nu}; \quad \mu \neq \nu; \quad \lim_{n\to\infty} d_{\mu\mu}^{(n)} = 1,$$

wenn alle bisher genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

§ 9.

Die Hauptformel. Spezielle Differenzengleichungen.

In diesem Paragraphen werden wir den Grenzwert

$$\omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

in eine besonders übersichtliche Gestalt bringen. Wir schicken zunächst eine Integralformel voraus. Es sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion im Grundintervall $\langle a, b\rangle$. Dann bestehen die folgenden Integralrelationen, die unter Benutzung von (1) und partieller Integration auseinander hervorgehen.

$$J = \int_a^b f r y'_\mu y'_\nu \, dx = -\int_a^b y_\nu (f r y'_\mu)' \, dx = -\int_a^b f y_\nu (r y'_\mu)' \, dx - \int_a^b (r f') y_\nu y'_\mu \, dx$$

$$= \int_a^b (\lambda_\mu p + q) f y_\mu y_\nu \, dx - \int_a^b (r f') y_\nu y'_\mu \, dx$$

$$= \int_a^b (\lambda_\nu p + q) f y_\mu y_\nu \, dx - \int_a^b (r f') y'_\nu y_\mu \, dx.$$

Daraus folgt

$$J = \int_a^b \left(\frac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} p + q\right) f y_\mu y_\nu \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b (r f') (y_\nu y_\mu)' \, dx$$

(57)

$$= \int_a^b y_\mu y_\nu \cdot \left\{\left(\frac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} p + q\right) \cdot f + \frac{1}{2} (r f')'\right\} \cdot dx.$$

Jetzt formen wir $A_{\mu\nu}$ um. Wenn wir partiell integrieren und die Gleichung (1) anwenden, erhalten wir

$$24\,A_{\mu\nu} = -\int_a^b y'_\nu \cdot [(r y'_\mu)'' + r y'''_\mu] \cdot dx = \int_a^b \cdot [(r y'_\mu)' y''_\nu + (r y'_\nu)' \cdot y''_\mu]\, dx - r y'_\nu y''_\mu \Big|_a$$

$$= -\int_a^b \frac{(r y'_\mu)'}{r} \cdot [r' y'_\nu + (\lambda_\nu p + q) y_\nu] \cdot dx -$$

$$-\int_a^b \frac{(r y'_\nu)'}{r} [r' \cdot y'_\mu + (\lambda_\mu p + q) y_\mu] \cdot dx + r' \cdot y'_\mu y'_\nu \Big|_a^b$$

$$= -\int_a^b \frac{r'}{r^2} \cdot \{(r y'_\mu)' \cdot r y'_\nu + (r y'_\nu)' r y'_\mu\}\, dx +$$

$$+ 2\int_a^b \frac{1}{r} (\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q) y_\mu y_\nu\, dx + r' \cdot y'_\mu y'_\nu \Big|_a^b$$

$$= \int_a^b r^2 \cdot \left(\frac{r'}{r^2}\right)' \cdot y'_\mu y'_\nu\, dx + 2\int_a^b \frac{1}{r} (\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q) y_\mu y_\nu\, dx.$$

Hieraus und aus (56) können wir

$$A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} = \int_a^b y_\mu y_\nu \left\{\frac{(\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q)}{12\,r} + \lambda_\mu \xi + \zeta\right\} dx +$$

$$+ \int_a^b r y'_\mu y'_\nu \cdot \left[-r \cdot \left(\frac{1}{24\,r}\right)'' - \frac{\lambda_\mu \sigma + \tau}{r}\right] \cdot dx$$

ableiten. Auf das zweite Integral der rechten Seite wenden wir die Formel (57) an. Zuvor setzen wir

$$\tau = -\frac{1}{24} r^2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' + \tau^*$$

und setzen jetzt zusätzlich voraus, daß die Funktionen σ und τ^* zweimal stetig differenzierbar sind. Wir erhalten insgesamt

$$(58)\quad \omega_{\mu\nu} = \int_a^b y_\mu y_\nu \cdot \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{(\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q)}{12\,r} - \dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{r} \left(\dfrac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} \cdot p + q\right) + \\ + \lambda_\mu \xi + \zeta - \left[r \cdot \left(\dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{2\,r}\right)'\right]' \end{array} \right\} dx.$$

Dies ist die angekündigte Hauptformel. Für $\mu = \nu$ ist

$$(59)\quad \omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \cdot \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\,r} - (\lambda_\mu p + q) \dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{r} + \lambda_\mu \xi + \zeta \\ - \left[r \left(\dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{2\,r}\right)'\right]' \end{array} \right\} dx.$$

Diese Formel gewährt einen guten Einblick in die Konvergenz der Differenzeneigenwerte, wie die folgenden drei Beispiele zeigen werden, welche alle erforderlichen Voraussetzungen, insbesondere auch die des Hilfssatzes 7, erfüllen. Die Formen $H^{(n)}(u, u)$ sind bei allen Beispielen durchweg positiv definit.

1. Es sei $\sigma^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv \tau^* \equiv 0$, also $\tau = -\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''$. Dann liefert (59)

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r}\, dx > 0.$$

Fast alle Differenzeneigenwerte liegen unterhalb des Eigenwerts, gegen den sie konvergieren. Mit großer Wahrscheinlichkeit können sie als untere Schranken der Eigenwerte angesehen werden. Für große μ ist asymptotisch

$$\omega_{\mu\mu} \simeq \bar{\omega}_{\mu\mu} = \lambda_\mu^2 \cdot \int_a^b y_\mu^2 \cdot \frac{p^2}{12\, r}\, dx > 0.$$

2. Es sei $\sigma^{(n)} \equiv \tau^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv 0$. Dann ist

$$\tau^* = \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''.$$

Es handelt sich um das normale Verfahren. Die Funktion r muß dabei viermal stetig differenzierbar sein. Wir erhalten aus (59)

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \cdot \left\{ \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r} - \frac{\lambda_\mu p + q}{r} \cdot \tau^* - \left[r \left(\frac{\tau^*}{2\, r} \right)' \right]' \right\} dx.$$

Über das Vorzeichen von $\omega_{\mu\mu}$ läßt sich ohne weiteres nichts sagen. Die geschweifte Klammer ist positiv und damit auch $\omega_{\mu\mu}$, wenn

$$-3\,\tau^{*2} - r\left(r \cdot \left(\frac{\tau^*}{r}\right)'\right)' \geqq 0 \quad \text{oder} \quad r^3 \cdot \varrho^2 + 8\,(r \cdot (\varrho\, r)')' \leqq 0; \qquad \varrho = \left(\frac{1}{r}\right)''$$

gilt. Asymptotisch die gleiche Formel wie beim ersten Beispiel. Bezeichnen wir den Grenzwert von $\omega_{\mu\nu}^{(n)}$ für das Verfahren des ersten Beispiels mit $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$, so darf man unter Benutzung von (56) auch schreiben

$$(59') \quad \omega_{\mu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\mu} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta)\, y_\mu^2 \cdot dx + \int_a^b \left[-\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' - \lambda_\mu \sigma - \tau \right] \cdot y_\mu'^2 \cdot dx.$$

Diese Formel ist recht brauchbar, um Vergleiche zwischen dem Verfahren nach (1) und einem anderen Verfahren, insbesondere dem des zweiten Beispiels, anzustellen. Im Falle der normalen Gleichungen ist

$$\omega_{\mu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\mu} = -\int_a^b \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' \cdot y_\mu'^2\, dx.$$

Gilt nun $\left(\frac{1}{r}\right)'' \leqq 0$, so ist $\omega_{\mu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\mu} \geqq 0$, so daß auch beim normalen Verfahren fast alle Differenzeneigenwerte unterhalb des zugehörigen Eigenwerts liegen.

3. Es sei

$$\sigma^{(n)} = \frac{p}{12}, \quad \tau^* = \frac{q}{12}, \quad \xi = \left(r\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right)', \quad \zeta = \left(r\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right)'.$$

Dann verschwindet $\omega_{\mu\mu}$, und es findet somit eine besonders starke Konvergenz statt. Man kann vermuten, daß sogar der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)}}{h^4}$$

existiert. Dies läßt sich in der Tat unter schärferen Voraussetzungen, als sie bisher benötigt wurden, beweisen. Dazu ist aber eine Fortsetzung der allgemeinen Untersuchungen notwendig, die in den nächsten Paragraphen erfolgen soll. Danach werden das erste und dritte Beispiel erneut behandelt werden.

§ 10.

Ein Konvergenzsatz über die Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Wir setzen jetzt r, p, q als viermal stetig differenzierbar voraus. Dann besitzen die Eigenfunktionen y_μ und die Funktionen $r\,y'_\mu$ stetige Ableitungen bis zur 5. Ordnung. Für $\sigma^{(n)}$ sollen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt sein. Es sollen aber auch die zweiten Differenzenquotienten von $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ ihrem Betrage nach gleichmäßig in n und in den Argumenten beschränkt sein. Die gleiche Beschränkung möge für die ersten Differenzenquotienten von $\xi^{(n)}$ und $\zeta^{(n)}$ zutreffen. Alle diese Voraussetzungen ermöglichen eine schärfere Abschätzung der Zahlen $d_{\mu\nu}^{(n)}$. Ersetzen wir die geschweiften Klammern in (45) durch die verallgemeinerten Tangententrapezformeln (16), so wird

$$A_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h\, F_i^{(n,\nu)} \cdot (r\,y'_\mu)'''_i - \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\, y'''_{\mu\,i-1/2} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} + R_{\mu\nu}^{(n)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(n)} = -\frac{h^4}{2^4 \cdot 5!} \cdot \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\, y_\mu^{(\mathrm{V})}(\beta_i) \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} + \frac{h^4}{2^4 \cdot 5!} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h\, F_i^{(n,\nu)} \cdot (r\,y'_\mu)^{(\mathrm{V})}_{\beta'_i};$$

$$x_{i-1} \leqq \begin{matrix}\beta_i \\ \beta_{i'}\end{matrix} \leqq x_{i+1}.$$

Der Rest $R_{\mu\nu}^{(n)}$ läßt sich unter Benutzung des Hilfssatzes 5 leicht abschätzen. Es ist

$$|R_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^4 \cdot \nu \cdot C_{26}, \tag{60}$$

wobei die Konstante C_{26} von n und ν nicht abhängt. Die zweite

Summe im obigen Ausdruck für $A_{\mu\nu}^{(n)}$ formen wir durch partielles Summieren nach $\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}$ um. Wir erhalten

$$A_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h F_i^{(n,\nu)} \cdot \left\{ (r y_\mu')_i''' + \frac{\Delta (r_{i-1/2} y_{\mu i-1/2}''')}{h} \right\} + R_{\mu\nu}^{(n)}$$

$$= h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h F_i^{(n,\nu)} \cdot z_i \cdot \tilde{p}_i + R_{\mu\nu}^{(n)} \quad \text{mit}$$

$$z_i = \frac{1}{24 \tilde{p}_i} \left\{ (r y_\mu')_i''' + \frac{\Delta (r_{i-1/2} y_{\mu i-1/2}''')}{h} \right\}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Damit die Werte z_i wohldefiniert sind, müssen wir voraussetzen, daß n hinreichend groß ist. Es gibt eine Zahl $N_5 > 0$ von der Beschaffenheit, daß

$$\tilde{p} \geqq \frac{C_1}{2} \qquad \text{für} \quad n \geqq N_5$$

ist. Für den Rest dieses Paragraphen denken wir uns $n \geqq N_5$ gewählt. Wegen der eingangs beschriebenen Voraussetzungen ist die Abschätzung

$$|z_i| \leqq C_{27}, \quad |\Delta z_i| \leqq h C_{27} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n-2$$

möglich mit einer von n und ν unabhängigen Konstanten C_{27}. Es ist

$$\frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = h \,.\, H^{(n)}(F_i^{(n,\nu)}, z_j) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} \Delta z_{i-1} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} \cdot h + \frac{R_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2}$$

$$= h \,.\, H^{(n)}(F_i^{(n,\nu)}, z_j) + z_1 \cdot F_1^{(n,\nu)} \cdot \sigma_{1/2}^{(n)} h + z_{n-1} \cdot \sigma_{n-1/2}^{(n)} \cdot F_{n-1}^{(n,\nu)} \cdot h$$

$$+ h^2 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} h \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \cdot \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}}{h} \sigma_{i-1/2}^{(n)} + \frac{R_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2}; \qquad z_0 = z_n = 0.$$

Hierbei dürfen wir $h \,.\, H^{(n)}$ nach Formel (40), die rechts stehende Summe nach Hilfssatz 5 und die restlichen Glieder (außer $R_{\mu\nu}^{(n)}$) nach dem Hilfssatz 7 abschätzen. Unter Berücksichtigung von (60) gewinnen wir

$$\left| \frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} \right| \leqq \frac{C_{28}}{\nu}, \quad \nu \geqq k_0, \tag{61}$$

wobei die Konstante C_{28} von n und ν nicht abhängt. Nach der gleichen Methode behandeln wir $B_{\mu\nu}^{(n)}$. Die Anwendung der Formel (16), partielles Summieren nach $\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}$ und die Einführung neuer Größen z_i nach dem obigen Muster führt unter Ausnutzung der zusätzlichen Voraussetzungen zu

$$\left| \frac{B_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} \right| \leqq \frac{C_{29}}{\nu}, \quad \nu \geqq k_0. \tag{61'}$$

Die Abschätzungen (61) und (61′) ermöglichen es, die Abschätzungen (54′) und (54) zu ersetzen durch

$$(62)\qquad \left|\frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2}\right| \leqq \frac{C_{30}}{k^3}; \quad \left|\frac{d_{\mu k}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h^3}\right| \leqq \frac{C_{30}}{k^{3/2}}; \quad k \geqq k_1 \geqq k_0,$$

wobei $C_{30} > 0$ von n und k nicht abhängt. Wir setzen jetzt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} = d_{\mu k} = \frac{\omega_{\mu k}}{\lambda_\mu - \lambda_k}, \qquad k \neq \mu.$$

Aus (62) und dem 4. Satz folgt jetzt

$$(62')\qquad |d_{\mu k}| \leqq \frac{C_{30}}{k^3}, \; |d_{\mu k} \cdot y_k'(x)| \leqq \frac{C_{30}}{k^{3/2}}; \; k \geqq k_1 \geqq k_0; \qquad k \neq \mu.$$

Die Reihe

$$(63)\qquad \varphi_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mu k} y_k(x); \qquad k \neq \mu$$

konvergiert wegen (7) und (62′) absolut und gleichmäßig. Das gleiche gilt für ihre formale Ableitung. Demnach ist φ_μ stetig differenzierbar, genügt den Randbedingungen, und es ist

$$\varphi_\mu'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mu k} y_k'(x); \qquad k \neq \mu.$$

Die Funktionen

$$\frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)\prime}(x) - d_{\mu\mu}^{(n)} \cdot F^{(n,\mu)\prime}(x)\right)$$

konvergieren, so behaupte ich nun, gleichmäßig gegen $\varphi_\mu'(x)$. Um dies zu beweisen, geben wir uns eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und schreiben

$$\varphi_\mu'(x) - \frac{1}{h^2} \cdot \left(y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} \cdot F^{(n,\mu)\prime}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{k_1 - 1} \left[d_{\mu k} y_k' - \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} \cdot F^{(n,k)\prime}\right] + P \text{ mit}$$

$$(64)\qquad P = \sum_{k=k_1}^{\infty} d_{\mu k} y_k' - \sum_{\substack{k=k_1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} \cdot F^{(n,k)\prime}.$$

Es gilt wegen (62) und (62′)

$$|P| \leqq 2 \cdot \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{C_{30}}{k^{3/2}};$$

wenn wir also k_1 groß genug machen, können wir $|P|$ unterhalb $\frac{\varepsilon}{2}$ drücken. Machen wir bei einem solchen k_1 noch n hinreichend groß, so können wir auch die erste Summe in (64) dem Betrage nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ und daher

$$\left|\varphi_\mu' - \frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)\prime}\right)\right| \leqq \varepsilon$$

machen. Damit ist die Behauptung bewiesen. Erst recht läßt sich

auf diesem Wege zeigen, daß die Konvergenz

$$\varphi_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)} - d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)}\right)$$

gleichmäßig stattfinden muß.

Wir untersuchen jetzt noch die Konvergenz der Koeffizienten $d_{\mu\mu}^{(n)}$ gegen Eins genauer. Nach der Sehnentrapezformel haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left(\int_a^b p\, y_\mu^2\, dx - \sum_{i=1}^{n-1} p_i y_{\mu i}^2 h\right) = -\frac{1}{12}\cdot\int_a^b (p\, y_\mu^2)''\, dx = 0. \tag{65}$$

Wir setzen jetzt

$$y_{\mu i}^{(n)} = y_{\mu i} = d_{\mu\mu}^{(n)}\cdot F_i^{(n,\mu)} + \psi_{\mu i}^{(n)}\cdot h^2.$$

Die hierdurch definierten Polygonfunktionen $\psi_{\mu(x)}^{(n)}$ konvergieren gleichmäßig gegen φ_μ. Es besteht nun die Beziehung

$$H^{(n)}\left(F^{(n,\mu)},\ \psi_\mu^{(n)}\right) = 0.$$

Tragen wir dies in (65) ein und beachten wir die Normierung der Eigenfunktionen, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left[1 - H^{(n)}(y_\mu, y_\mu)\, h + h^2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{(n)}\cdot y_{\mu i}^2 h - h^2\cdot\sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)}\left(\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h}\right)^2\cdot h\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left\{1 - d_{\mu\mu}^{(n)2} - h^5\cdot H^{(n)}\left(\psi_\mu^{(n)},\ \psi_\mu^{(n)}\right) + h^2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{(n)}\cdot y_{\mu i}^2 h\right.$$

$$\left. - h^2\cdot\sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)}\left(\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h}\right)^2\cdot h\right\} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - d_{\mu\mu}^{(n)}}{h^2} = \delta_\mu = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma\cdot y_\mu'^2\, dx - \frac{1}{2}\int_a^b \xi\cdot y_\mu^2\cdot dx. \tag{66}$$

Man erkennt jetzt, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)} - F^{(n,\mu)}\right) = \varphi_\mu - \delta_\mu\cdot y_\mu(x) = \Phi_\mu(x) \tag{67}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)\prime} - F^{(n,\mu)\prime}\right) = \varphi_\mu' - \cdot\,\delta_\mu\cdot y_\mu'(x) = \Phi_\mu'(x) \tag{68}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz existieren müssen.

Satz 5. Sind r, p, q viermal stetig differenzierbar, genügen die Funktionen $\sigma^{(n)}$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 und sind ferner die ersten Differenzenquotienten von $\xi^{(n)}$ und $\xi^{(n)}$ sowie die zweiten von $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ dem Betrage nach gleichmäßig in n und in den

Argumenten beschränkt. so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-d_{\mu\mu}^{(n)}}{h^2}=\delta_\mu=\frac{1}{2}\int_a^b\sigma\cdot y_\mu'^2\,dx-\frac{1}{2}\int_a^b\xi\cdot y_\mu^2\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_\mu^{(n)}-F^{(n,u)}}{h^2}=\Phi_\mu(x);\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_\mu^{(n)\prime}-F^{(n,u)\prime}}{h^2}=\Phi_u'(x),$$

und zwar die letzteren im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Die Funktion $\Phi_\mu(x)$ ist stetig und stetig differenzierbar. Sie läßt sich in die Reihe

$$\Phi(x)=-\delta_\mu\cdot y_\mu(x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\mu}}^{\infty}d_{\mu k}y_k(x);\ d_{\mu k}=\frac{\omega_{\mu k}}{\lambda_\mu-\lambda_k}$$

entwickeln.

§ 11.

Eine Eigenschaft der Funktionen φ_μ und Φ_μ.

Es seien die Voraussetzungen des 5. Satzes erfüllt, dazu seien die Funktionen σ und τ stetig differenzierbar. Dann können wir die Formeln (56) durch partielle Integration auf die Gestalt

$$\omega_{\mu\nu}=\int_a^b y_\nu L(y_\mu;\lambda_\mu)\,dx\qquad\text{mit}$$

$$L(y;\lambda)=\frac{1}{24}\{(ry')'''+(ry''')'\}+(\lambda\xi+\zeta)y+[(\lambda\sigma+\tau)y']'$$

bringen. Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung

$$(ry')'+(\lambda_\mu p+q)y=L(y_\mu;\lambda_\mu)-\omega_{\mu\mu}p\,y_\mu=f(x).$$

Sie besitzt nach § 1/1 eine den Randbedingungen genügende Lösung, denn die Funktion f bildet mit y_μ das verschwindende Integral

$$\int_a^b f\,y_\mu\,dx=0.$$

Es sei y diejenige Lösung, die mit y_μ das verschwindende Integral

$$\int_a^b p\,y_\mu\,y\,dx=0$$

bildet. Indem wir die obige Differentialgleichung mit y_ν multi-

plizieren und danach über das Grundintervall integrieren, entsteht

$$\int_a^b [(r y')' y_\nu + (\lambda_\mu p + q) y_\nu y]\, dx = \int_a^b y_\nu L(y_\mu; \lambda_\mu)\, dx - \omega_{\mu\mu} \int_a^b p\, y_\mu y_\nu\, dx$$

oder
$$\int_a^b y \cdot \{(r y_\nu')' + (\lambda_\mu \cdot p + q) y_\nu\}\, dx = \omega_{\mu\nu}; \qquad \nu \neq \mu$$

oder
$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \cdot \int_a^b \cdot\, p\, y_\nu\, y\, dx = \omega_{\mu\nu}.$$

Somit ist

$$\int_a^b p\, y_\nu\, y \cdot dx = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = d_{\mu\nu}. \qquad \nu \neq \mu$$

Die Funktion $(y - \varphi_\mu)$ ist also zu allen Eigenfunktionen orthogonal. Sie muß daher identisch verschwinden. Also ist $y = \varphi_\mu$ diejenige Lösung der inhomogenen Gleichung, welche mit y_μ einen verschwindenden Fourierkoeffizienten bildet. Demnach ist sowohl φ_μ als auch Φ_μ sogar zweimal stetig differenzierbar, und es gelten die Formeln

(69) $$(r \varphi_\mu')' + \varphi_\mu (\lambda_\mu p + q) = L(y_\mu; \lambda_\mu) - \omega_{\mu\mu} p\, y_\mu$$

(69′) $$(r \Phi_\mu')' + \Phi_\mu (\lambda_\mu p + q) = L(y_\mu; \lambda_\mu) - \omega_{\mu\mu} p\, y_\mu.$$

§ 12.

Weitere Konvergenzbetrachtungen.

Wir übernehmen die Voraussetzungen des 5. Satzes. Zusätzlich setzen wir die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma - \sigma^{(n)}}{h^2} = \bar{\sigma}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\tau - \tau^{(n)}}{h^2} = \bar{\tau}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\xi - \xi^{(n)}}{h^2} = \bar{\xi};$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta - \zeta^{(n)}}{h^2} = \bar{\zeta}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz voraus. Wir knüpfen jetzt an die Relationen (44), (45), (45′), (46) des § 7 an. Indem wir dort $\sigma^{(n)}$ durch σ, $\tau^{(n)}$ durch τ, $\xi^{(n)}$ durch ξ, $\zeta^{(n)}$ durch ζ und $F^{(n,\nu)}$ durch y_ν ersetzen, erhalten wir bei dem folgenden Grenzübergang unter Berücksichtigung des 4. und 5. Satzes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^4} \Bigg\{ \omega_{\mu\nu}^{(n)} - h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi_i + \zeta_i)\, y_{\mu i}\, y_{\nu i}\, h$$
$$+ h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma_{i-1/2} + \tau_{i-1/2}) \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \cdot \Delta y_{\nu i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2} \cdot \Delta y_{\nu i-1} \left[y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right]$$
$$(70) \qquad + \sum_{i=1}^{n-1} y_{\nu i} \cdot \left[(r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} \right] h \Bigg\} = -\int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta)\, y_\mu \cdot y_\nu\, dx$$
$$+ \int_a^b (\lambda_\mu \bar{\sigma} + \bar{\tau})\, y'_\mu\, y'_\nu\, dx - \int_a^b \Phi_\nu L(y_\mu; \lambda_\mu)\, dx = E_1.$$

Ferner ist gemäß (16)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1}\cdot y'''_{\mu i-1/2}+\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1}\cdot\left[y'_{\mu i-1/2}-\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h}\right]\right\}$$

$$(71)\qquad = -\frac{1}{2^4\cdot 5!}\cdot\int_a^b y_\mu^{(V)}\cdot(r y'_\nu)\,dx = E_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} y_{\nu i}\cdot(r y'_\mu)''_i-\sum_{i=1}^{n-1} y_{\nu i}\cdot\left[(r y'_\mu)'_i-\frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h}\right]h\right\}$$

$$(72)\qquad = \frac{1}{2^4\cdot 5!}\int_a^b y_\nu\cdot(r y'_\mu)^{(V)}\cdot dx = E_3.$$

Weiterhin findet man auf Grund der Sehnentrapezformel (15)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\,y'_{\nu i-1/2}\,y'''_{\mu i-1/2}\cdot h-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1/2}\cdot y'''_{\mu i-1/2}\right\}$$

$$(73)\qquad = -\frac{1}{24^2}\cdot\int_a^b r y'''_\nu\cdot y'''_\mu\,dx = E_4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\cdot\frac{\Delta y_{\nu i-1}}{h}\cdot\Delta y_{\mu i-1}\right.$$

$$(74)\qquad \left.+h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\,y'_{\nu i-1/2}\cdot y'_{\mu i-1/2}\cdot h\right\}$$

$$= -\frac{1}{24}\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\sigma+\tau)(y'_\nu\cdot y'''_\mu+y'_\mu y'''_\nu)\,dx = E_5$$

und gemäß der Formel (13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{h^2\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu y'_\nu\,dx-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\,y'_{\mu i-1/2}\cdot y'_{\nu i-1/2}\cdot h\right\}$$

$$(75)\qquad = \frac{1}{24}\cdot\int_a^b[(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu y'_\nu]''\cdot dx = E_6$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\,y'_{\nu i-1/2}\cdot y'''_{\mu i-1/2}\cdot h+\frac{h^2}{24}\cdot\int_a^b r y'_\nu y'''_\mu\cdot dx\right\}$$

$$(76)\qquad = \frac{1}{24^2}\int_a^b[r y'_\nu y'''_\mu]''\cdot dx = E_7.$$

Wegen (14) ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{h^2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_\mu\xi_i+\xi_i)\,y_{\mu i}\,y_{\nu i}\cdot h-h^2\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\xi+\xi)\,y_\mu\,y_\nu\,dx\right\}$$

(77)
$$=\frac{1}{12}\,[\lambda_\mu\xi+\xi)\,y_\mu\,y_\nu]'\Big|_a^b=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}y_{\nu i}(r\,y'_\mu)'''_i\cdot h-\frac{h^2}{24}\cdot\int_a^b y_\nu(r\,y'_\mu)'''\,dx\right\}$$

(78)
$$=\frac{1}{12\,.\,24}\cdot(y_\nu(r\,y'_\mu)'''\,)'\Big|_a^b=E_3.$$

Jetzt addieren wir die Gleichungen (70)—(78) und erhalten

(79)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{\mu\nu}^{(n)}-h^2\,.\,\omega_{\mu\nu}}{h^4}=\sum_{i=1}^{8}E_i$$

oder ausführlich geschrieben

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{\mu\nu}^{(n)}-h^2\,.\,\omega_{\mu\nu}}{h}=-\int_a^b(\lambda_\mu\bar\xi+\bar\xi)\,y_\mu\,y_\nu\,dx+\int_a^b(\lambda_\mu\bar\sigma+\bar\tau)\,y'_\mu\,y'_\nu\,dx$$

$$-\int_a^b\Phi_\nu(x)\,.\,L(y_\mu;\lambda_\mu)\,dx+\frac{1}{2^4\,.\,5!}\cdot\int_a^b[y_\nu(r\,y'_\mu)^{(V)}-y'_\nu\,.\,r\,y_\mu^{(V)}]\,.\,dx+$$

$$+\frac{1}{24}\int_a^b\{[(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu y'_\nu]''-(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,(y'_\nu\,.\,y'''_\mu+y'_\mu y'''_\nu)\}\,dx+$$

$$+\frac{1}{24^2}\cdot\left\{-\int_a^b r\,y'''_\mu\,y'''_\nu\,dx+(r\,y'_\nu\,y'''_\mu)'\Big|_a^b+2(y_\nu(r\,y'_\mu)'''\,)'\Big|_a^b\right\}.$$

Aus dem Satz 4, (66), (79) folgt für $\mu=\nu$

$$\lambda_\mu-\Lambda_\mu^{(n)}=h^2\,.\,\omega_{\mu\mu}+h^4\,.\,\Omega_\mu^{(n)}\quad\text{mit}\ .$$

(80)
$$\lim_{n\to\infty}\Omega_\mu^{(n)}=\sum_{i=1}^{8}E_i+\delta_\mu\,\omega_{\mu\mu}=\Omega_\mu.$$

§ 13.

Linearkombinationen von Differenzeneigenwerten.

Wir machen jetzt eine erste Anwendung der Formel (80) des vorangehenden Paragraphen. Es ist

$$\lambda_\mu=\Lambda_\mu^{(n)}+\frac{L^2}{n^2}\cdot\omega_{\mu\mu}+\frac{L^4}{n^4}\cdot\Omega_\mu^{(n)}$$

$$\lambda_\mu=\Lambda_\mu^{(m)}+\frac{L^2}{m^2}\cdot\omega_{\mu\mu}+\frac{L^4}{m^4}\cdot\Omega_\mu^{(m)}\qquad L=b-a.$$

Es sei $n \neq m$. Wir multiplizieren die erste der Gleichungen mit n^2, die zweite mit m^2 und ziehen danach beide voneinander ab. Aus der neuen Gleichung berechnen wir λ_μ zu

$$\lambda_\mu = \frac{\Lambda_\mu^{(n)} n^2 - \Lambda_\mu^{(m)} m^2}{n^2 - m^2} - \frac{L^4 \cdot \Omega_\mu}{n^2 \cdot m^2} + R_{nm} \frac{L^4}{n^2 \cdot m^2}.$$

Wir setzen jetzt noch $n = \Theta m$. Dann kann man R_{nm} die Form geben

$$R_{nm} = \frac{\Theta^2}{\Theta^2 - 1} \cdot \left(\frac{\Omega_\mu^{(m\Theta)} - \Omega_\mu}{\Theta^2} + \Omega_\mu - \Omega_\mu^{(m)} \right).$$

Bei festgehaltenem Θ strebt also R_{nm} gegen Null, wenn m über alle Grenzen wächst. Wir nehmen jetzt die Linearkombination

$$\lambda_\mu^{(n,m)} = \frac{\Lambda_\mu^{(n)} n^2 - \Lambda_\mu^{(m)} m^2}{n^2 - m^2}$$

als Näherungswert für λ_μ. Dann lehren die vorstehenden Formeln, daß sein Fehler bei festem Θ von der Größenordnung der vierten Potenz der Schrittweite h ist. Im allgemeinen wird man also mit $\lambda_\mu^{(n,m)}$ näher an λ_μ herankommen als mit $\Lambda_\mu^{(n)}$ und $\Lambda_\mu^{(m)}$. Nun lassen sich die Näherungen $\Lambda_1^{(2)}$ und $\Lambda_1^{(3)}$ für den ersten Eigenwert besonders schnell und leicht berechnen. Ihre Linearkombination liefert

$$\lambda_1^{(2,3)} = \Lambda_1^{(3)} + 0{,}8\,(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}).$$

Ist $\omega_{\mu\mu} = 0$, so wählen wir die Kombination

$$\bar{\lambda}_\mu^{(n,m)} = \frac{n^4 \cdot \Lambda_\mu^{(n)} - m^4 \cdot \Lambda_\mu^{(m)}}{n^4 - m^4}$$

als Näherungswert. Die Linearkombination aus $\Lambda_1^{(2)}$ und $\Lambda_1^{(3)}$ lautet jetzt

$$\bar{\lambda}_1^{(2,3)} = \Lambda_1^{(3)} + \frac{16}{65}\,(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}).$$

Numerische Beispiele werden im Schlußparagraphen gegeben werden.

§ 14.

Das starke Differenzenverfahren.

Unter diesem Namen betrachten wir erneut den Fall

$$\sigma = \frac{p}{12}, \quad \tau = \frac{q}{12} - \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'', \quad \xi = \left(r\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right)', \quad \zeta = \left(r\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right)'.$$

Die Differenzengleichungen selbst sind dadurch noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann sie etwa in der Form ansetzen, die sich aus

$$\sigma_{i-1/2}^{(n)} = \frac{p_{i-1/2}}{12}, \quad \tau_{i-1/2}^{(n)} = \frac{q_{i-1/2}}{12} - \frac{r_{i-1/2}^2}{6\,h^2} \cdot \left\{ \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}} - \frac{2}{r_{i-1/2}} \right\}$$

$$h^2 \cdot \xi_i^{(n)} = \Delta\left(r_{i-1/2}\,\Delta\left(\frac{p_{i-1}}{24\,r_{i-1}}\right)\right); \qquad h^2 \cdot \zeta_i^{(n)} = \Delta\left(r_{i-1/2}\,\Delta\left(\frac{q_{i-1}}{24\,r_{i-1}}\right)\right)$$

ergibt. Sind r, p, q viermal stetig differenzierbar, so erfüllt dieses Verfahren alle Voraussetzungen der Hauptformel, des Satzes 5 und der Formel (80) Das gleiche trifft übrigens auch für ein Verfahren zu, dem wir die Koeffizientenfunktionen

$$\sigma^{(n)} \equiv \sigma, \quad \tau^{(n)} \equiv \tau, \quad \xi^{(n)} \equiv \xi, \quad \zeta^{(n)} \equiv \zeta$$

zugrundelegen. Es ist in jedem Falle $\omega_{\mu\mu} = 0$, und Formel (80) liefert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)}}{h^4} = \sum_{i=1}^{8} E_i .$$

Damit ist die in § 9 ausgesprochene Behauptung bestätigt. Das Differenzenverfahren führt also zu einer besonders starken Konvergenz der Differenzeneigenwerte. Dies rechtfertigt die obige Überschrift.

Die Grenzwerte $\omega_{\mu\nu}$ verschwinden im allgemeinen nicht für $\mu \neq \nu$. Gemäß (58) ist

$$\omega_{\mu\nu} = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \cdot \int_a^b p\, y_\nu \frac{y_\mu (\lambda_\mu \cdot p + q)}{24\, r}\, dx.$$

Also ist $d_{\mu\nu}$ der Entwicklungskoeffizient der Funktion

$$- \frac{y_\mu (\lambda_\mu p + q)}{24\, r}$$

bezüglich des Systems der Eigenfunktionen. Daraus ergibt sich ohne weiteres

$$\varphi_\mu = - \frac{y_\mu (\lambda_\mu \cdot p + q)}{24\, r} + y_\mu \cdot \int_a^b p\, y_\mu^2 \cdot \frac{\lambda_\mu p + q}{24\, r}\, dx.$$

Diese einfache Beziehung erlaubt eine wesentliche Verbesserung der Differenzeneigenlösung $F^{(n,\mu)}$. Wir setzen

$$\tilde{F}^{(n,\mu)} = F^{(n,\mu)} \left(1 - h^2 \cdot \frac{\Lambda_\mu^{(n)} p + q}{24\, r}\right).$$

Dann konvergiert die Folge

$$\frac{1}{h^2} \left(y_\mu^{(n)} - \tilde{F}^{(n,\mu)}\right)$$

gegen die mit einem gewissen konstanten Faktor multiplizierte Eigenfunktion y_μ. Daraus ergibt sich, daß der Fehler, bis auf den $\tilde{F}^{(n,\mu)}$, die entsprechende Polygonfunktion einer unnormierten Eigenfunktion approximiert, auch nach Division durch h^2 gegen Null konvergiert. Man wird vermuten, daß der durch h^4 dividierte Fehler einer Grenzfunktion zustrebt. Da indes die Berechnung von Eigenfunktionen nicht die gleiche Wichtigkeit wie die Berechnung von Eigenwerten besitzt, sehe ich von einer Überprüfung dieser Vermutung ab.

§ 15.
Das Korrekturverfahren.

Unter diesem Namen behandeln wir erneut das erste Beispiel des § 9, wonach

$$\sigma^{(n)} \equiv 0, \quad \xi^{(n)} \equiv 0, \quad \zeta^{(n)} \equiv 0, \quad \tau = -\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''$$

sein soll. Es empfiehlt sich, entweder $\tau^{(n)} \equiv \tau$ oder aber

$$\bar{r}_{i-1/2} = r_{i-1/2} - \frac{r_{i-1/2}^2}{6}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{2}{r_{i-1/2}}\right)$$

zu setzen. Wir fanden bereits

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r}\, y_\mu^2\, dx.$$

Hierfür können wir wegen des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung auch schreiben

$$\omega_{\mu\mu} = \left[\frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12 \cdot r p}\right]_{x=\bar{x}}$$

mit $\bar{x}$ als geeigneter Abszisse. Indem wir diese durch einen geschätzten Wert $\tilde{x}$ ersetzen, können wir näherungsweise

$$\lambda_\mu \approx \tilde{\Lambda}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + h^2 \cdot \left[\frac{(\Lambda_\mu^{(n)} p + q)^2}{12\, r p}\right]_{x=\tilde{x}}$$

schreiben. Im allgemeinen wird die rechte Seite wesentlich näher an λ_μ herankommen als $\Lambda_\mu^{(n)}$ selbst. Besonders einfach ist die Berechnung der rechten Seite für $q \equiv 0$. Jetzt können wir

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot \Lambda_\mu^{(n)2} \cdot \left(\frac{p}{r}\right)_{x=\tilde{x}} \tag{81}$$

oder etwa

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot \Lambda_\mu^{(n)} \cdot \tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} \cdot \left(\frac{p}{r}\right)_{x=\tilde{x}} \tag{82}$$

als verbesserten Wert nehmen. Wegen dieser einfachen Verbesserungsmöglichkeit, die man beim numerischen Rechnen nicht unterlassen wird, habe ich in der Überschrift das Differenzenverfahren dieses Paragraphen als Korrekturverfahren bezeichnet.

§ 16.
Numerische Beispiele.

Wir behandeln drei Beispiele STURM-LIOUVILLEscher Eigenwertprobleme. Wir vergleichen dabei die Differenzeneigenwerte des normalen, des starken und des Korrekturverfahrens miteinander. Zur besseren Übersicht setzen wir

$\Lambda_k^{(n)} = M_k^{(n)}$ beim starken Verfahren
$\Lambda_k^{(n)} = N_k^{(n)}$ beim Korrekturverfahren
$\tilde{N}_k^{(n)}$ für die verbesserten Werte gemäß (81)
$\tilde{\tilde{N}}_k^{(n)}$ für die verbesserten Werte gemäß (82).

Beim normalen Verfahren kennzeichnet $\Lambda_k^{(n)}$ die Differenzeneigenwerte.

1) $\qquad y'' + \lambda y = 0;\ a = 0,\ b = 1;\ \lambda_k = k^2 . \pi^2.$

Die Differenzengleichungen für das normale und das Korrekturverfahren lauten

$$\Lambda \Lambda F_{i-1} + h^2 . \Lambda^{n)} . F_i = 0.$$

Es ist $\Lambda_k^{(n)} = N_k^{(n)} = \lambda_k \cdot \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2;\ \vartheta = \frac{k}{2n}$. Beim starken Verfahren setzen wir $\sigma^{(n)} \equiv \frac{1}{12},\ \tau^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv 0$. Es gilt dann

$$M_k^{(n)} = \frac{\Lambda_k^{(n)}}{1 - h^2 . \Lambda_k^{(n)}/12}$$

und ferner mit Bezug auf das Korrekturverfahren

$$\tilde{N}_k^{(n)} = N_k^{(n)} + h^2 . N_k^{(n)2};\quad \tilde{\tilde{N}}_k^{(n)} = M_k^{(n)}.$$

Es ergeben sich die folgenden Tabellen:

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	Kombinationen
λ_1	9,870			
$\Lambda_1^{(n)}$	8,000	9,000	9,372	$\Lambda_1^{(3)} + 0{,}8\,(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}) = 9{,}800$
$N_1^{(n)}$	8,000	9,000	9,372	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	9,333	9,750	9,829	
$\tilde{\tilde{N}}_1^{(n)}$	9,600	9,819	9,853	$M_1^{(3)} + \frac{16}{65}(M_1^{(3)} - M_1^{(2)}) = 9{,}873$
$M_1^{n)}$	9,600	9,819	9,853	

λ_2	39,478		
$\Lambda_2^{n)}$	27,000	32,000	$\Lambda_2^{(4)} + \frac{9}{7}(\Lambda_2^{(4)} - \Lambda_2^{(3)}) = 33{,}429$
$N_2^{n)}$	27,000	32,000	
$\tilde{N}_2^{(n)}$	33,750	37,333	
$\tilde{\tilde{N}}_2^{(n)}$	36,000	38,400	$M_2^{(4)} + \frac{81}{175}(M_2^{(4)} - M_2^{(3)}) = 39{,}511$
$M_2^{(n)}$	36,000	38,400	

λ_3	88,826
$\Lambda_3^{(4)}$	54,628
$N_3^{(4)}$	54,628
$\tilde{N}_3^{(4)}$	70,170
$\tilde{\tilde{N}}_3^{(4)}$	76,349
$M_3^{(4)}$	76,349

2) $\qquad (e^{2x} y')' + \lambda . e^{2x} . y = 0;\ a = 0,\ b = 1.$

$$y_k = e^{-x} . \sin \pi k x \text{ (unnormiert)};\quad \lambda_k = 1 + k^2 . \pi^2.$$

Die normalen Gleichungen lassen sich in der Form

$$e^{h} \cdot \Delta F_i - e^{-h} \cdot \Delta F_{i-1} + h^2 \cdot \Lambda^{(n)} F_i = 0$$

schreiben. Wir setzen

$$\tau^{(n)} = -\frac{e^{2x}}{6}$$

beim Korrekturverfahren und

$$\xi^{(n)} \equiv 0, \quad \zeta^{(n)} \equiv 0; \qquad \sigma^{(n)} \equiv \frac{e^{2x}}{12}, \quad \tau^{(n)} = -\frac{e^{2x}}{6}$$

beim starken Verfahren. Man erhält dann die Beziehungen

$$N_k^{(n)} = \left(1 - \frac{h^2}{6}\right) \Lambda_k^{(n)}; \qquad \tilde{N}_k^{(n)} = N_k^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot N_k^{(n)2}, \quad \tilde{\tilde{N}}_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{1 - \frac{h^2}{12} \cdot N_k^{(n)}}$$

$$M_k^{(n)} = \frac{\dot{N}_k^{(n)}}{1 - \frac{h^2}{12} \cdot \dot{\Lambda}_k^{(n)}}.$$

Es ergeben sich die Tabellen

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	Kombinationen
λ_1	10,870			
$\Lambda_1^{(n)}$	9,021	9,824	10,377	$\Lambda_1^{(3)} + 0{,}8 \cdot (\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}) = 10{,}799$
$N_1^{(n)}$	8,645	9,824	10,269	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	10,202	10,718	10,818	
$\tilde{\tilde{N}}_1^{(n)}$	10,544	10,807	10,849	$M_1^{(3)} + \frac{16}{65}(M_1^{(3)} - M_1^{(2)}) = 10{,}873$
$M_1^{(n)}$	10,645	10,828	10,855	

λ_2	40,478		
$\Lambda_2^{(n)}$	28,009	33,005	$\Lambda_2^{(4)} + \frac{9}{7}(\Lambda_2^{(4)} - \Lambda_2^{(3)}) = 39{,}647$
$N_2^{(n)}$	27,491	32,661	
$\tilde{N}_2^{(n)}$	34,487	38,217	
$\tilde{\tilde{N}}_2^{(n)}$	36,876	39,355	$M_2^{(4)} + \frac{81}{175}(M_2^{(4)} - M_2^{(3)}) = 40{,}518$
$M_2^{(n)}$	37,115	39,441	

3) $(ry')' + \lambda r^2 \cdot y = 0$; $a = 0$, $b = 1$; $r = \frac{1}{1 - 2x + 2x^2}$.

Es ist $y_1 = x(1-x)$ (unnormiert); $\lambda_1 = 4$.

Wir setzen $\tau^{(n)} = -\frac{r^2}{6}$ für das Korrekturverfahren. Es ist $p/r = r$. Als Mittelwert von p/r, wie er in der Verbesserung vorkommt, wählen wir den Wert 1,5. — Das starke Verfahren setzen wir auf Grund der Gleichungen

$$\sigma^{(n)} \equiv \frac{r^2}{12}, \quad \tau^{(n)} \equiv -\frac{r^2}{6}, \quad h^2 \cdot \xi_i^{(n)} = \frac{\Delta \Delta (r^2)_{i-1}}{48}; \qquad \zeta^{(n)} \equiv 0$$

an. Man erhält folgende Werte:

	$n=2$	$n=3$	Linearkombination
λ_1	4,000		
$A_1^{(n)}$	3,200	3,846	
$N_1^{(n)}$	2,987	3,747	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	3,266	3,942	$A_1^{(3)} + 0{,}8(A_1^{(3)} - A_1^{(2)}) = 4{,}363$
$\tilde{\tilde{N}}_1^{(n)}$	3,294	3,953	
$M_1^{(n)}$	3,461	4,002	

Sämtliche Beispiele lassen die günstige Wirkung des starken und des Korrekturverfahrens deutlich erkennen. Beim letzteren empfiehlt sich die Formel (82). Die Kombinationsmethode bringt bei den beiden ersten Beispielen verblüffende Verbesserungen. Beim dritten Beispiel ist sie ohne Erfolg. Dennoch wird man sie im allgemeinen anwenden.

Das Differenzenverfahren ist an sich recht einfach. Dies zeigt sich auch bei den numerischen Rechnungen. Doch ging ihm bisher die Auffassung zur Seite, daß es nur grobe Näherungen liefere. Ich hoffe mit dieser Arbeit gezeigt zu haben, daß man es hinreichend genau machen kann, ohne seine Einfachheit zu gefährden.

(Eingegangen am 26. 1. 1946.)

Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Zu Beginn der Zahlenreihe überwiegen für $n > 1$ die Fälle, in denen keine Zerlegung in n-te Potenzen von durchweg verschiedener Größe möglich ist.

Doch ist ihre Anzahl stets endlich:

Zu jedem n existiert eine Schranke g_n, oberhalb welcher jede Zahl als Summe von paarweis ungleichen n-ten Potenzen dargestellt werden kann.

Dieser Satz wird im folgenden bewiesen. —

Der Beweis beruht auf der Konstruktion einer von n abhängigen Zahl s_n oder kurz s, deren sämtliche Vielfache ms in der Form

$$c_1^n + c_2^n + \cdots \quad \text{mit} \quad 0 < c_1 < c_2 < \cdots$$

darstellbar sind.

Um diese Zerlegbarkeit der Vielfachen möglichst durchsichtig zu machen, werden für s selbst nicht weniger als $2^n - 1$ derartige Zerlegungen verlangt, nämlich (große lateinische Buchstaben bezeichnen Potenzsummen, kleine: natürliche Zahlen)

$$S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1},$$

und die Gesamtheit der Summanden aller S_i soll überdies eine Menge n-ter Potenzen von lauter verschiedenen ungeraden Zahlen bilden.

Unter diesen Annahmen ergibt sich aus

$$m = t_0 + t_1 \cdot 2^n + t_2 \cdot 2^{2n} + t_3 \cdot 2^{3n} + \cdots \qquad 0 \leqq t_i < 2^n \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

zunächst

$$ms = t_0 s + t_1 s \cdot 2^n + t_2 s \cdot 2^{2n} + \cdots$$

und, wenn für die von Null verschiedenen $t_i s$ die Potenzsummen

$$T_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_{t_i}$$

eingesetzt werden, in

$$ms = T_0 + T_1 \cdot 2^n + T_2 \cdot 2^{2n} + \cdots$$

eine Darstellung der behaupteten Art.

Denn nach den Voraussetzungen über die S_i enthält kein T_i zwei gleiche Glieder (dies Wort bleibe auf n-te Potenzen beschränkt) und die Glieder von $T_i \cdot 2^{in}$ und $T_k \cdot 2^{kn}$ unterscheiden sich für $i \neq k$ eben durch das verschieden häufige Auftreten des Primfaktors 2. —

Zur Konstruktion einer solchen Zahl s dient jede Identität in x von der Gestalt

$$(1) \qquad \begin{gathered}(x+a_1)^n+\cdots+(x+a_p)^n \equiv (x+a_{p+1})^n+\cdots+(x+a_{2p})^n \\ 0<a_i;\quad a_i \neq a_k,\ i \neq k\ (i,k=1,2,\ldots,2p).\end{gathered}$$

Hier darf

$$a_i \equiv 1 \pmod 2 \qquad (i=1,2,\ldots,2p)$$

angenommen werden; sonst bewirkt dies die Substitution

$$x = \frac{\bar{x}+1}{2}.$$

Mit (1) gilt für jedes d

$$(x+a_1+d)^n+\cdots+(x+a_p+d)^n \equiv (x+a_{p+1}+d)^n+\cdots+(x+a_{2p}+d)^n.$$

Hierin sollen nun der Größe d gewisse Werte

$$d_i \geqq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

erteilt werden. Die linken und rechten Seiten der betreffenden Gleichungen mögen L_i und R_i heißen:

$$\begin{aligned}L_i &\equiv (x+a_1+d_i)^n+\cdots+(x+a_p+d_i)^n \\ R_i &\equiv (x+a_{p+1}+d_i)^n+\cdots+(x+a_{2p}+d_i)^n.\end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Jedes der 2^n Produkte

$$(2) \qquad L_1 L_2 \ldots L_{n-1} L_n,\ L_1 L_2 \ldots L_{n-1} R_n,\ \ldots,\ R_1 R_2 \ldots R_n$$

stellt eine Summe von p^n Gliedern der Form

$$(3) \qquad |(x+a_{k_1}+d_1)\ldots(x+a_{k_n}+d_n)|^n \qquad (1 \leqq k_\nu \leqq 2p)$$

dar.

Genügen die d_i den Bedingungen

$$\begin{gathered}d_i \equiv 0 \pmod 2 \qquad \begin{pmatrix} i,j=1,2,\ldots,n \\ k,l=1,2,\ldots,2p \end{pmatrix}, \\ a_k+d_i \neq a_l+d_j \text{ für } i \neq j\end{gathered}$$

so ergeben alle $(2p)^n$ Ausdrücke (3) bei geradem x einen ungeraden Wert und kein Paar von ihnen ist identisch gleich. Daher existiert eine kleinste nicht-negative gerade Zahl, die, für x eingesetzt, diese sämtlichen $(2p)^n$ Glieder von (2) zu paarweis verschiedenen ungeraden Zahlen macht.

In (2) liegen dann 2^n Zerlegungen ein und derselben Zahl vor mit den für die Zerlegungen von s geforderten Eigenschaften. Also darf, mit diesem Wert von x in $L_1 L_2 \ldots L_n$,

$$s = L_1 L_2 \ldots L_n$$

gesetzt werden. —

Die Gültigkeit von (1) ist, wie Koeffizientenvergleichung lehrt, gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Systems von n Gleichungen

$$(5) \qquad a_1^k+\cdots+a_p^k = a_{p+1}^k+\cdots+a_{2p}^k, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Da nun aus

$$(6) \qquad a_1^k+\cdots+a_l^k = a_{l+1}^k+\cdots+a_{2l}^k, \qquad k=1,2,\ldots,\nu$$

unmittelbar, identisch in h_ν.

$$(7)\qquad \left.\begin{matrix} a_1^k + \cdots + a_l^k + \\ + (a_{l+1} + h_\nu)^k + \cdots + (a_{2l} + h_\nu)^k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_{l+1}^k + \cdots + a_{2l}^k + \\ + (a_1 + h_\nu)^k + \cdots + (a_l + h_\nu)^k, \end{matrix}\right.$$
$$k = 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1$$

folgt, gewinnt man ein Beispiel für (5) auf bekannte[1]), höchst einfache Weise.

Man geht etwa aus von

$$1^k + 7^k = 3^k + 5^k, \qquad k = 1$$

und wählt

$$h_i = 2^{i+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

für den iterierten Übergang von (6) nach (7).

Der $(n-1)$-te Schritt führt zu einem System wie (5) mit $p = 2^n$, und zwar sind die a_i die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^{n+2} - 1$ in dieser Verteilung: stellt man sie dyadisch dar, so gehören zur linken Seite L_1 genau diejenigen mit ungerader Quersumme, zu R_1 die mit gerader. Hiernach gilt die Zahl

$$s_n = L_1 L_2 \ldots L_n$$

als bestimmt; sie ist zugleich mit p gerade. —

Schließlich sei z eine nicht durch s_n teilbare Zahl,

$$z \equiv r \,(\text{mod. } s_n), \quad 0 < r \lesseqgtr s_n - 1.$$

Subtrahiert man von z die ersten r der $s_n - 1$ Zahlen

$$(8)\qquad (s_n+1)^n,\ (2s_n+1)^n,\ \ldots,\ ((s_n-1)\cdot s_n+1)^n,$$

so ergibt sich ein Vielfaches $m s_n$ von s_n und

$$m s_n + (s_n+1)^n + \cdots + (r s_n + 1)^n$$

stellt wegen der Zerlegbarkeit von $m s_n$ jedenfalls eine Zerlegung von z in n-te Potenzen dar, wenn $m \gtreqless 0$ ausfällt.

Nun greifen die Voraussetzungen über s_n noch einmal ein. Die Zahlen (8) sind sämtlich größer als s_n und ungerade. Das erste Merkmal unterscheidet sie von den ungeraden, das zweite von den geraden Gliedern in der Zerlegung für $m s_n$.

Daher ist z in lauter verschiedene n-te Potenzen zerlegbar, sofern die Subtraktion aller Zahlen (8) möglich, d. h.

$$z \gtreqless (s_n+1)^n + (2s_n+1)^n + \cdots + ((s_n-1)s_n+1)^n$$

ist.

Also hat die Schranke

$$g_n = s_n^{2n+1}$$

gewiß die behauptete Beschaffenheit.

[1]) Dickson-Bodewig, Einführung in die Zahlentheorie, Leipzig u. Berlin 1931 (B. G. Teubner), 4. Kap., besonders § 32—35.

(Eingegangen am 29. Januar 1947.)

Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol[1]).

Von

A. Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden Note soll die zuerst von Bol[2]) bewiesene Ungleichung

$$L^2 - 4F^* F \geqq 0, \tag{1.1}$$

welche die Länge L einer konvexen Kurve mit dem von ihr eingeschlossenen Inhalt F und dem Inhalt F^* des ihr zugeordneten „Kappenbereichs" verbindet, mit Hilfe des Wirtingerschen Lemmas bewiesen werden. Dadurch wird (1.1) in diejenige Reihe von isoperimetrischen Ungleichungen eingeordnet, welche durch alte „klassische" Hilfsmittel bewiesen werden können.

Zum Schluß der Arbeit wird noch mittels ähnlicher Schlüsse eine lineare isoperimetrische Ungleichung bewiesen, welche die bekannte lineare isoperimetrische Ungleichung verallgemeinert.

2. **Das Wirtingersche Lemma.** Damit der Leser alles beisammen haben möge, sei hier das Wirtingersche Lemma mit kurzem Beweis angeführt. Dieses Lemma besagt[3]):

Ist $y = y(x)$ eine für alle x definierte eindeutige, stetige Funktion von x, mit der Periode 2π, deren Ableitung y' im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbar ist, und gilt ferner

$$\int_0^{2\pi} y\, dx = 0, \tag{2.1}$$

so ist

---

[1]) Vorgetragen u. a. in der Universität Greifswald am 3. 12. 1943.

[2]) Bol, G., Ein isoperimetrisches Problem, Nieuw Archief voor Wiskunde **20** (1940) S. 171–175.

Vgl. auch Dinghas, Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken, Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 428–440 und Über die lineare isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone und Kurven mit Ecken, Monatsh. f. Math. u. Physik.

[3]) Vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, Teubner, Leipzig 1916. Der Beweis, der hier gegeben wird, geht auf eine Arbeit des Verf. zurück: Zur isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Kurven, Revue Union Math. interbalkanique, Bd. **3**, Fasc. 3–4, 1940.

$$I(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dx \geqq 0, \tag{2.2}$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur für

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \tag{2.3}$$

mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 ein.

Zum Beweis verfahren wir folgendermaßen: Erstens ist, wie man leicht feststellt, $I(y) = I(y - a\cos x)$ für jede Konstante a. Zweitens gibt es mindestens ein q so, daß

$$y(q) + y(\pi + q) = 0$$

wird. Dies folgt aus der Tatsache, daß wegen (2.1) die Funktion $y(x) + y(x+\pi)$ in $0 \leqq x < \pi$ mindestens eine Nullstelle besitzen muß. Setzt man dann $a = y(q)$, so verschwindet die Funktion

$$Y(x) = y(x) - y(q)\cos(x-q) = y - a\cos(x-q)$$

bei $x = q$ und $x = \pi + q$.

Da nun jetzt die Identität gilt

$$Y'^2 - Y^2 - (Y' - Y\operatorname{cotg}(x-q))^2 = \frac{d}{dx}(Y^2 \operatorname{cotg}(x-q)) \tag{2.4}$$

und, wie man leicht feststellt, in der Umgebung von $x = q$ bzw. $x = \pi + q$

$$Y = o(\sqrt{|x-q|}) \quad \text{bzw.} \quad Y = o(\sqrt{|\pi - x + q|})$$

ist, so erhält man aus (2.4) durch Integration und Berücksichtigung von $I(Y) = I(y)$ die gewünschte Identität

$$I(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dx = \int_0^{2\pi} (Y' - Y\cot(x-q))^2\, dx = R(y) \geqq 0, \tag{2.5}$$

woraus (2.2) unmittelbar folgt.

Daß das Gleichheitszeichen hier nur für (2.3) eintritt, ist trivial und folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit in y und (2.1) unmittelbar aus (2.5).

3. **Der zugeordnete Kappenbereich und die Ungleichung von Bol.** Liegt jetzt in einer Ebene E ein konvexer Bereich $\mathfrak{K}$ vor, der von einer Kurve C begrenzt wird, so definieren wir den zugeordneten Kappenbereich $\mathfrak{K}^*$ als denjenigen Bereich, den man erhält, indem man an einen Einheitskreis von E um den Nullpunkt alle Tangenten T parallel zu den Eckentangenten von $\mathfrak{K}$ legt und dann den von diesen Tangenten T eingeschlossenen konvexen Bereich nimmt.

Wir bezeichnen jetzt mit p bzw. $\mathfrak{p}^*$ die Stützfunktionen von C bzw. des Randes C^* von $\mathfrak{K}^*$ und mit L bzw. $\mathfrak{L}^*$ ihre Längen. Bilden wir dann die Funktion

$$y = \frac{p(\varphi)}{L} - \frac{p^*(\varphi)}{L^*}, \tag{3.1}$$

so genügt diese als Funktion des „Stützwinkels" φ den Bedingungen des Wirtingerschen Lemmas und wir erhalten durch Einsetzen, mit

Rücksicht auf die bekannten Formeln für den Inhalt F von $\mathfrak{K}$ und F^* von $\mathfrak{K}^*$.

$$\frac{F}{L^2} - \frac{A}{L\,L^*} + \frac{F^*}{L^{*2}} = -\frac{1}{2}\,R(y) \leqq 0, \tag{3.2}$$

mit

$$A = \int_0^{2\pi} (p\,p^* - p'\,p^{*\prime})\,d\varphi. \tag{3.3}$$

Hier könnten wir sogar das Integral als ein Integral im RIEMANNschen Sinne nehmen, wenn man die klassischen Ergebnisse BLASCHKEsches über die Stützfunktion eines konvexen Bereiches berücksichtigt[4]).

Wir beweisen jetzt: Die Größe A ist gleich der Länge L von C.

Dazu genügt zu zeigen, daß, falls J ein von zwei „Kappentangenten" (Fig. 1) begrenztes Intervall der Einheitsperipherie bedeutet, die Gleichung

$$A(J) = \int_J (p\,p^* - p'\,p'^*)\,d\varphi = \int_J p\,d\varphi \tag{3.4}$$

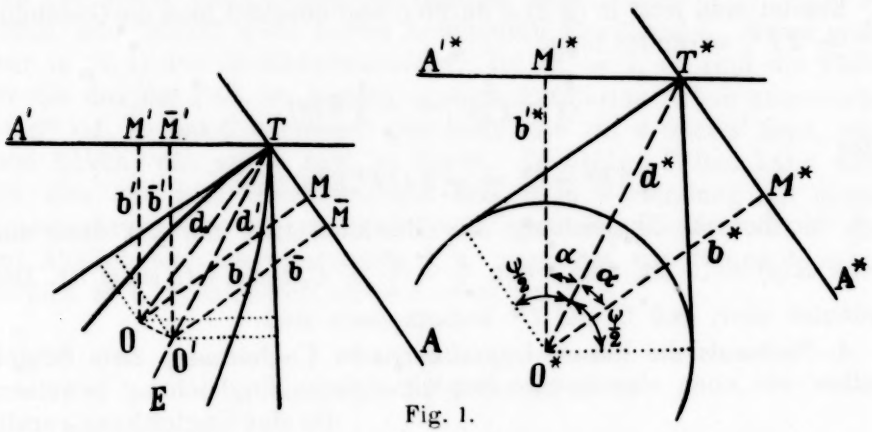

Fig. 1.

gilt. Denn außerhalb der Intervalle J ist $p^* = 1$ und wegen der Volladitivität des LEBESGUEschen Integrals ist dann die Behauptung wahr.

Daß (3.4) richtig ist, kann man sich am besten durch nachfolgende Anordnung der Integration überzeugen:

Man fasse immer zwei in Bezug auf die Richtung O^*T^* (Fig. 1) symmetrisch liegenden Stützgeraden, z. B. A, A' und ihre entsprechenden A^*, $A^{*\prime}$ zusammen und bezeichne mit b, b' bzw. b^*, $b^{*\prime}$ die entsprechenden Werte der Stützfunktionen. Da allgemein, wie man leicht nachrechnet, $p'\,p'^*$ gleich dem inneren Produkt der Vektoren $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{M^*T^*}$ ist, so ist

$$A(J) = \int_0^{\frac{\psi}{2}} \{(b + b')\,b^* - (a + a')\,a^*\}\,d\alpha,$$

[4]) BLASCHKE, W., Beweise zu Sätzen von BRUNN und MINKOWSKI über die Minimaleigenschaft des Kreises. Jahresber. D. M. V., Bd. **23** (1914), S. 210—234.

wobei $a^* = T^* M^*$ ist, und $a = (TM)$, $a' = (TM)'$ die inneren Produkte von $\overrightarrow{MT}$ bzw. $\overrightarrow{M'T}$ mit zwei zu $\overrightarrow{M^*T^*}$ bzw. $\overrightarrow{M'^*T^*}$ äquipollenten Einheitsvektoren bedeuten. Projiziert man O der ohne Einschränkung der Allgemeinheit innerhalb C genommen werden kann auf die Richtung TE parallel zu T^*O^* und setzt man $TO' = d'$, so wird wegen $b + b' = 2\,O'\overline{M} = 2\,d' \cos\alpha$ und der leicht beweisbaren Gleichung $a + a' = 2\,T\overline{M} = 2\,d' \sin\alpha$

$$A(J) = 2\,d'\,d^* \int_0^{\frac{\psi}{2}} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,d\alpha = 2\,d^*\,d' \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} = 2\,d' \sin\frac{\psi}{2}.$$

Nun ist aber

$$\int_J p\,d\varphi = \int_J \{b + b'\}\,d\alpha = 2\,d' \int_0^{\frac{\psi}{2}} \cos\alpha\,d\alpha = 2\,d' \sin\frac{\psi}{2}.$$

Es gilt also in der Tat (3.4) und somit ist erwiesen, daß $A = L$ ist.

Ersetzt man jetzt in (3.2) A durch L und beachtet man die Gleichung $L^* = 2\,F^*$, so findet man

$$\frac{F}{L^2} - \frac{1}{4\,F^*} = -\frac{1}{2}\,R(y)$$

oder

$$4\,F\,F^* - L^2 = -2\,L^2\,F^*\,R(y) \leqq 0,$$

d. h. die Bolsche Ungleichung. Die Gleichheit tritt hier nur dann ein, wenn $R(y) = 0$ ist, also wenn $\frac{p}{L} - \frac{p^*}{L} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi$ ist. Das bedeutet aber, daß C und C^* homothetisch sind.

4. **Nochmals die lineare isoperimetrische Ungleichung.** Zum Schluß wollen wir noch eine lineare isoperimetrische Ungleichung beweisen, die eine Ungleichung verallgemeinert, die ich in meiner, in der Einleitung zitierten, Arbeit bewiesen habe. Dazu betrachten wir wieder die konvexe Kurve C und konstruieren an den Einheitskreis $\mathfrak{K}$ den zugeordneten Kappenbereich C^* (Fig. 2). Es seien $2\,d$ bzw. $2\,d^*$ (in der Figur irrtümlich durch α, α^* bezeichnet) die Breiten von C bzw. C^* in einer Richtung (z. B. $\varphi = 0$), d. h. die Entfernung zweier paralleler Stützgeraden. Wir wählen den Nullpunkt O für die Kurve C in einer Entfernung a_1 bzw. a_2 von den Stütz-

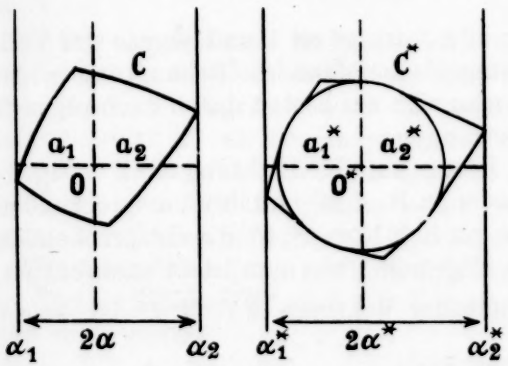

Fig. 2.

geraden α_1, α_2 von C, indem wir diese Größen mittels der Gleichungen

$$\frac{a_1}{a_1^*} = \frac{a_2}{a_2^*}, \quad a_1 + a_2 = 2d$$

bestimmen. Die a_1^*, a_2^* sind eindeutig bestimmt, wenn man als O^* den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ wählt. Man findet dann

$$a_1 = a_1^* \frac{d}{d^*}, \quad a_2 = a_2^* \frac{d}{d^*}.$$

Nun genügt die Funktion $y = p - \frac{d}{d^*} p^*$ der Identität (2.5), da ja dort nur die Eigenschaft von y verwendet wurde, indem sie nämlich bei $x = q$ (hier ist $q = 0$) und $x = q + \pi$ verschwindet.

Durch Anwendung von (2.5) auf diese Funktion erhalten wir dann nach einigen Rechnungen die gesuchte Ungleichung

$$F d^{*2} - L d d^* + F^* d^2 \leqq 0. \tag{4.1}$$

Daß aus dieser Ungleichung die Bolsche Ungleichung (1.1) folgt, ist trivial und bedarf wohl keiner besonderen Erwähnung. Wann steht aber in (4.1) das Gleichheitszeichen? Ist $d^* = 1$, so sind die Fälle, für die das der Fall ist, bereits in meiner zitierten Arbeit untersucht. Ist $d^* > 1$, so hat C entweder eine Ecke, die auf α oder α' liegt, oder zwei Ecken, die auf α bzw. α' liegen. In beiden Fällen kann man, wie dies aus dem Wirtingerschen Lemma in Verbindung mit diesen Voraussetzungen hervorgeht, nur dann eintreten, wenn C mit C^* (bis auf Ähnlichkeit) übereinstimmt, d. h. wenn der von C umschlossene Bereich $\mathfrak{K}$ Kappenbereich eines Kreises ist.

(Eingegangen am 5. Februar 1947.)

Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung.

Von

M. Müller in Tübingen.

L. Euler hat in den Fällen $k = 2, 3$ und 4 bewiesen, daß für reelles positives r die Lösungen des Systemes linearer Differenzengleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{1,n+1} = a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ a_{2,n+1} = r\,a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ a_{3,n+1} = r\,a_{1n} + r\,a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k,n+1} = r\,a_{1n} + r\,a_{2n} + r\,a_{3n} + \cdots + r\,a_{k-1,n} + a_{kn} \end{cases}$$

bei fast beliebiger Wahl der Ausgangswerte $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}$ die Beziehungen

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r},\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r^2},\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{kn}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r^{k-1}}$$

erfüllen [1]). Für den allgemeinen Fall eines beliebigen k hat Herr M. Krafft einen Beweis gegeben [2]), bei dem wie bei Euler das System (1) zunächst durch eine Differenzengleichung k-ter Ordnung ersetzt wird. Herr Krafft kommt mittels begrifflicher Schlüsse sehr rasch zu einer Bestätigung der Beziehungen (2) unter der Voraussetzung, daß die Ausgangswerte nicht negativ und nicht alle gleich Null sind.

Der Beweis, den wir in dieser Arbeit geben, ist länger; er führt aber ohne den Umweg über eine lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung zu einer expliziten Darstellung der Zahlen $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}$, die einen tieferen Einblick in die Konvergenzverhältnisse ermöglicht.

---

[1]) L. Euler, De inventione quotcumque mediarum proportionalium citra radicum extractionem. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **14** (1769): I 1770, p. 188—214. (= L. Euleri Opera omnia (1), **6**, p. 240—262.) Vgl. auch W. Lorey, Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monatshefte f. Math. und Phys. **48** (1939), S. 190—197.

[2]) M. Krafft, Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monatshefte f. Math. und Phys. **49** (1941), S. 312—315.

Außerdem ersetzen wir das System (1) durch das etwas allgemeinere System

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{1,n+1} = a_{1n} + p\,a_{2n} + p\,a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ a_{2,n+1} = q\,a_{1n} + a_{2n} + p\,a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ a_{3,n+1} = q\,a_{1n} + q\,a_{2n} + a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k,n+1} = q\,a_{1n} + q\,a_{2n} + q\,a_{3n} + \cdots + q\,a_{k-1,n} + a_{kn}, \end{cases}$$

wo p und $q = pr$ positive reelle Zahlen sein sollen, durch deren geeignete Wahl sich die Konvergenz des Eulerschen Verfahrens verbessern läßt.

Wenn $p = q$ und damit $r = 1$ ist, leuchtet die Eulersche Behauptung unmittelbar ein. Wir können also von vornherein annehmen, daß $p \neq q$ und damit $r \neq 1$ ist.

§ 1.

Lösung des Differenzengleichungssystemes (3).

1. Soll der Ansatz

$$a_{1n} = C_1 \alpha^n, \ldots, a_{kn} = C_k \alpha^n$$

zu einer nichttrivialen Lösung des Systemes (3) führen, so müssen die Zahlen $C_1, \ldots, C_k$ eine nichttriviale Lösung des Systemes

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi C_1 + p C_2 + \cdots + p C_{k-1} + p C_k &= 0 \\ q C_1 + \xi C_2 + \cdots + p C_{k-1} + p C_k &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ q C_1 + q C_2 + \cdots + q C_{k-1} + \xi C_k &= 0 \end{aligned}$$

sein, wo

$$(5)\qquad 1 - \alpha = \xi$$

gesetzt wurde. Es muß also für ξ eine Nullstelle der Determinante

$$(6)\qquad D_k(x) = \begin{vmatrix} x & p & p & \ldots & p & p \\ q & x & p & \ldots & p & p \\ q & q & x & \ldots & p & p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & q & q & \ldots & q & x \end{vmatrix}$$

gewählt werden.

$D_k(x)$ ist ein Polynom k-ten Grades in x, das sich leicht berechnen läßt. Ist $pq = 0$, so ist $D_k(x) = x^k$. Ist $pq \neq 0$, so kann man in der Determinante $D_k(x)$ die mit $\frac{q}{p}$ multiplizierten Elemente der letzten

Spalte in der ersten Spalte subtrahieren und dann nach den Elementen der ersten Spalte entwickeln; dabei ergibt sich

$$D_\varkappa(x) = (x-q)D_{k-1}(x) + (-1)^{k+1}\left(q-\frac{q}{p}x\right)\begin{vmatrix} p & p & \dots & p & p \\ x & p & \dots & p & p \\ q & x & \dots & p & p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q & \dots & x & p \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man in der noch übrig gebliebenen $(k-1)$-reihigen Determinante die Elemente der letzten Spalte in allen vorangehenden Spalten und entwickelt man dann nach den Elementen der ersten Zeile, so ergibt sich nach leichter Umrechnung die Rekursionsformel

$$D_k(x) = (x-q)D_{k-1}(x) + q(x-p)^{k-1}. \tag{7}$$

Hiernach ist

$$D_\varkappa(x) = (x-q)D_{\varkappa-1}(x) + q(x-p)^{\varkappa-1} \quad (\varkappa = 3, 4, \dots, k).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(x-q)^{k-\varkappa}$ und summiert dann über $\varkappa$ von 3 bis k, so entsteht die Formel

$$D_k(x) = (x-q)^{k-2}D_2(x) + q(x-p)^2[(x-p)^{k-3} + (x-p)^{k-4}(x-q) + \dots + (x-q)^{k-3}]. \tag{8}$$

Dabei ist nach (6)

$$D_2(x) = x^2 - pq. \tag{9}$$

Ist $p = q$, so wird

$$\begin{aligned} D_k(x) &= (x-p)^{k-2}(x^2-p^2) + (k-2)p(x-p)^{k-1} \\ &= (x+(k-1)p)(x-p)^{k-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ist $p \neq q$, so wird

$$D_k(x) = (x-q)^{k-2}(x^2-pq) + q(x-p)^2\frac{(x-p)^{k-2}-(x-q)^{k-2}}{q-p}$$

und nach leichter Umformung

$$D_k(x) = \frac{p}{p-q}(x-q)^k + \frac{q}{q-p}(x-p)^k. \tag{11}$$

2. Ist $pq = 0$, so hat $D_k(x)$ die k-fache Nullstelle $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = 0$. Ist $p = q \neq 0$, so hat $D_k(x)$ die Nullstellen $\xi_0 = -(k-1)p$, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{k-1} = p$. Nun sei $pq \neq 0$, $p \neq q$ und ξ eine Nullstelle von $D_k(x)$. Da

$$D_k(p) = p(p-q)^{k-1} \neq 0, \quad D_k(q) = q(q-p)^{k-1} \neq 0,$$

ist $\xi \neq p$ und $\xi \neq q$. Aus der Gleichung

$$\frac{p}{p-q}(\xi-q)^k + \frac{q}{q-p}(\xi-p)^k = 0$$

folgt also, daß

$$\frac{p}{q} - \left(\frac{\xi-p}{\xi-q}\right)^k = 0.$$

Wird

(12) $$\tau = \frac{\xi - p}{\xi - q}$$

gesetzt, so ist also

$$\tau^k - \frac{p}{q} = 0,$$

d. h.

(13) $$\tau = \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon,$$

wo ε eine k-te Einheitswurzel bedeutet. Aus (12) und (13) folgt, daß

(14) $$\xi = \frac{p - q\tau}{1 - \tau} = \frac{p - q\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon}{1 - \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon}.$$

Den k verschiedenen k-ten Einheitswurzeln $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ entsprechen k verschiedene Zahlen

(15) $$\tau_\varkappa = \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1),$$

diesen k verschiedene Zahlen

(16) $$\xi_\varkappa = \frac{p - q\tau_\varkappa}{1 - \tau_\varkappa} = \frac{p - q\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa}{1 - \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1),$$

diesen k verschiedene Zahlen

(17) $$\alpha_\varkappa = 1 - \xi_\varkappa = \frac{1 - p - (1 - q)\tau_\varkappa}{1 - \tau_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1).$$

3. Zur Vorbereitung der Ermittlung der Zahlen $C_1, \ldots, C_k$ berechnen wir jetzt die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Zeile der Determinante $D_k(x)$, die wir von links nach rechts mit $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$ bezeichnen.

Zunächst ist

(18) $$A_k(x) = D_{k-1}(x).$$

Weiter ist

$$A_1(x) = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} p & p & \ldots & p & p \\ x & p & \ldots & p & p \\ q & x & \ldots & p & p \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ q & q & \ldots & x & p \end{vmatrix} = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ x-p & 0 & \ldots & 0 & p \\ q-p & x-p & \ldots & 0 & p \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ q-p & q-p & \ldots & x-p & p \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1}(-1)^k p(x-p)^{k-2},$$

d. h.

(19) $$A_1(x) = -p(x-p)^{k-2}.$$

Nun sei $2 \leqq \varkappa \leqq k-1$. Dann ist, wenn wir die $(\varkappa-1)$-te, $\varkappa$-te und $(\varkappa+1)$-te Spalte und die $(\varkappa-1)$-te, $\varkappa$-te, $(\varkappa+1)$-te und $(\varkappa+2)$-te Zeile ausführlicher andeuten,

$$A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} x & p & \dots & p & p & p & \dots & p & p & p \\ q & x & \dots & p & p & p & \dots & p & p & p \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . \\ q & q & \dots & x & p & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & p & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & x & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & q & x & \dots & p & p & p \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . \\ q & q & \dots & q & q & q & \dots & x & p & p \\ q & q & \dots & q & q & q & \dots & q & x & p \end{vmatrix};$$

subtrahiert man die Elemente der letzten Spalte in allen anderen Spalten und nach dieser Umformung die Elemente der ersten Zeile in allen übrigen Zeilen, so wird

$$A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ q-x & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . \\ q-x & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man, den LAPLACEschen Entwicklungssatz anwendend, nach den Minoren der $k-1-(\varkappa-1) = k-\varkappa$ letzten Spalten, so ergibt sich, daß

$$(20) \qquad A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-p & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ q-p & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 \\ q-p & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (-1)^J \begin{vmatrix} q-x & x-p & 0 & \dots & 0 \\ q-x & q-p & x-p & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ q-x & q-p & q-p & \dots & x-p \\ q-x & q-p & q-p & \dots & q-p \end{vmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} J &= [1+(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)]+[\varkappa+(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)] \\ &= 1+\varkappa+2[(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)]. \end{aligned}$$

Die erste Determinante, die in (20) auftritt, hat den Wert

$$(-1)^{k-\varkappa+1}\, p(x-p)^{k-\varkappa-1}.$$

Die zweite Determinante formen wir um, indem wir die Elemente der vorletzten Zeile in der letzten Zeile, dann die Elemente der drittletzten Zeile in der vorletzten Zeile, schließlich die Elemente der ersten Zeile in der zweiten Zeile subtrahieren. Dadurch werden die Elemente in der Hauptdiagonale alle gleich $q-x$, die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen alle gleich 0. Diese zweite Determinante hat also, weil sie $k-1-(k-\varkappa) = \varkappa-1$ Reihen hat, den Wert

$$(q-x)^{\varkappa-1}.$$

Die Zusammenfassung dieser Teilergebnisse zeigt, daß

$$A_\varkappa(x) = -p(x-p)^{k-\varkappa-1}(x-q)^{\varkappa-1}. \tag{21}$$

Nachträglich gilt diese Formel, wie ein Blick auf (19) lehrt, auch noch für $\varkappa = 1$; sie gilt also für $\varkappa = 1, 2, \dots, k-1$.

4. Im Hinblick auf die geplante Anwendung können wir jetzt voraussetzen, daß p und q von 0 und untereinander verschieden sind. Dann gilt für jede Nullstelle ξ von $D_k(x)$ die Formel (14) und für jedes $k \geqq 1$ die Formel (11). Nach (14) und (21) ist

$$A_\varkappa(\xi) = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2} \tau^{k-\varkappa-1} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots, k-1)$$

und nach (18), (11) und (14)

$$A_k(\xi) = \left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2} \frac{p-q\tau^{k-1}}{1-\tau} = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2} \tau^{-1},$$

wie eine leichte Umformung ergibt. Es gilt also ausnahmslos die Formel

$$A_\varkappa(\xi) = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2} \tau^{-1}\tau^{k-\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots, k). \tag{22}$$

Diese k Zahlen $A_\varkappa(\xi)$ sind alle von Null verschieden. Daher ergeben sich die Lösungen $C_1, C_2, \dots, C_k$ des Gleichungssystemes (4) aus der Proportion

$$C_1 : C_2 : \dots : C_k = A_1(\xi) : A_2(\xi) : \dots : A_k(\xi).$$

Da wir über den Proportionalitätsfaktor frei verfügen dürfen, kann

$$C_\varkappa = \tau^{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{23}$$

gesetzt werden.

Die Zahlen

$$a_{1n} = \tau^{k-1}\alpha^n, \quad a_{2n} = \tau^{k-2}\alpha^n, \quad \ldots, \quad a_{kn} = \alpha^n$$

bilden dann bei jeder Wahl der Einheitswurzel ε eine Lösung des Differenzengleichungssystemes (3) für $n \geqq 1$. Dasselbe gilt allgemeiner von den Ausdrücken

$$a_{1n} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \tau_\varkappa^{k-1} \alpha_\varkappa^n, \quad a_{2n} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \tau_\varkappa^{k-2} \alpha_\varkappa^n, \quad \ldots, \quad a_{kn} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \alpha_\varkappa^n \tag{24}$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$.

5. Wir haben jetzt diese Konstanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ den vorgeschriebenen Anfangswerten $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}$ anzupassen. Dabei setzen wir zunächst voraus, daß keine der Zahlen $\alpha_\varkappa$ gleich Null ist, so daß die Formeln (24) auch für $n = 0$ einen bestimmten Sinn haben. Nach (24) und (15) muß

$$\begin{cases} \gamma_0 \varepsilon_0^{k-1} + \gamma_1 \varepsilon_1^{k-1} + \cdots + \gamma_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{k-1} = a_{10} \sqrt[k]{\dfrac{q}{p}}^{k-1} \\ \gamma_0 \varepsilon_0^{k-2} + \gamma_1 \varepsilon_1^{k-2} + \cdots + \gamma_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{k-2} = a_{20} \sqrt[k]{\dfrac{q}{p}}^{k-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k-1} = a_{k0} \end{cases} \tag{25}$$

werden.

Bezeichnet man das algebraische Komplement von $\varepsilon_\varkappa^{k-\lambda}$ in der Determinante

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_0^{k-1} & \varepsilon_1^{k-1} & \ldots & \varepsilon_{k-1}^{k-1} \\ \varepsilon_0^{k-2} & \varepsilon_1^{k-2} & \ldots & \varepsilon_{k-1}^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_0^{0} & \varepsilon_1^{0} & \ldots & \varepsilon_{k-1}^{0} \end{vmatrix}$$

mit $E_{k-\lambda,\varkappa}$, so ist nach (25)

$$\gamma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{-k-\lambda} \frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{26}$$

Nun ist aber

$$\frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E} = \frac{1}{k} \varepsilon_\varkappa^\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1; \ \lambda = 1, 2, \ldots, k). \tag{27}$$

Man sieht dies wohl am raschesten ein, wenn man beachtet, daß für $\mu = 1, 2, \ldots, k$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, k$

$$\varepsilon_0^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,0}}{E} + \varepsilon_1^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,1}}{E} + \cdots + \varepsilon_{k-1}^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,k-1}}{E} = \delta_{\lambda\mu}$$

sein muß, wo $\delta_{\lambda\mu} = 1$, wenn $\lambda = \mu$, und $\delta_{\lambda\mu} = 0$, wenn $\lambda \neq \mu$, und

daß durch diese Forderung die Größen $\frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E}$ eindeutig bestimmt sind. Es ist aber in der Tat

$$\frac{1}{k}\left[\varepsilon_0^{k-\mu}\varepsilon_0^{\lambda}+\varepsilon_1^{k-\mu}\varepsilon_1^{\lambda}+\cdots+\varepsilon_{k-1}^{k-\mu}\varepsilon_{k-1}^{\lambda}\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[1+\varepsilon_{\lambda-\mu}+\varepsilon_{\lambda-\mu}^{2}+\cdots+\varepsilon_{\lambda-\mu}^{k-1}\right]=\begin{cases}1, & \text{wenn } \lambda=\mu,\\ 0, & \text{wenn } 0<|\lambda-\mu|\leqq k-1.\end{cases}$$

Aus (24), (26) und (27) folgt, daß

$$a_{\sigma n}=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\right)\alpha_{\varkappa}^{n} \tag{28}$$

$$(\sigma=1,2,\ldots,k;\quad n=0,1,2,\ldots).$$

6. Diese Formeln stellen nun aber auch in dem bisher ausgeschlossenen Fall, daß eine der Zahlen $\alpha_\varkappa$ gleich Null ist, diejenige Lösung der Differenzengleichungen (3) dar, welche die Anfangswerte $a_{10},\ldots,a_{k0}$ hat, sofern wir nur vereinbaren, daß $\alpha_\varkappa^0$ auch dann den Wert 1 haben soll, wenn $\alpha_\varkappa=0$ ist. Unter dieser Annahme ist nämlich ausnahmslos

$$\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\right)\alpha_{\varkappa}^{0}=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}$$

$$=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}a_{\sigma 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma}\cdot k=a_{\sigma 0}\qquad(\sigma=1,2,\ldots,k);$$

also liefern die Formeln (28) die richtigen Anfangswerte. Ferner ist für $s=1,2,\ldots,k$ und $n\geqq 0$[3])

$$q\sum_{\sigma=1}^{s-1}a_{\sigma n}+a_{sn}+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}a_{\sigma n}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_{\varkappa}^{n}\left\{q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\varepsilon_{\varkappa}^{-\sigma}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}+\varepsilon_{\varkappa}^{-s}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{s}+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\varepsilon_{\varkappa}^{-\sigma}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{s}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-s}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_{\varkappa}^{n}\left\{q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\left(\varepsilon_k\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}+\right.$$

$$\left.+1+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}\right\}=a_{s,n+1},$$

weil für $\varkappa=0,1,2,\ldots,k-1$

$$q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}+1+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}$$

$$=q\,\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\frac{1-\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-1}}{1-\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}}+1+p\,\frac{1-\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-k}}{\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}-1}$$

[3]) Für $s=1$ bedeute $\sum_{\sigma=1}^{s-1}$, für $s=k$ bedeute $\sum_{\sigma=s+1}^{k}$ jeweils 0.

$$= \frac{1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa - q\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^2 + p\,\frac{q}{p}\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^2}{1-\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa} = \alpha_\varkappa$$

ist. Die Ausdrücke (28) befriedigen also auch das Differenzengleichungssystem (3).

§ 2.

Untersuchung des infinitären Verhaltens der $a_{\sigma n}$ und der Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$.

1. Wir wollen zunächst zeigen, daß für ungerades k

(29 a) $|\alpha_0| > |\alpha_1| = |\alpha_{k-1}| > |\alpha_2| = |\alpha_{k-2}| > \ldots > |\alpha_{\frac{k-1}{2}}| = |\alpha_{\frac{k+1}{2}}| > 0$

und für gerades k

(29 b) $|\alpha_0| > |\alpha_1| = |\alpha_{k-1}| > |\alpha_2| = |\alpha_{k-2}| > \ldots > |\alpha_{\frac{k}{2}-1}| = |\alpha_{\frac{k}{2}+1}| > |\alpha_{\frac{k}{2}}| \geqq 0$;

da bei geradem k $\varepsilon_{\frac{k}{2}} = -1$ ist, steht nach Formel (17) in (29 b) am Schluß statt des Größerzeichens das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$1 - p + (1 - pr)\sqrt[k]{\frac{1}{r}} = 0,$$

d. h.

(30) $$p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}, \quad q = r\,\frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}.$$

Die Ungleichungen (29) ergeben sich folgendermaßen: Es ist nach (17) und (15)

(31) $$|\alpha_\varkappa|^2 = \alpha_\varkappa\bar{\alpha}_\varkappa = \frac{(1-p)-(1-q)\tau_\varkappa}{1-\tau_\varkappa}\cdot\frac{(1-p)-(1-q)\bar{\tau}_\varkappa}{1-\bar{\tau}_\varkappa}$$

$$= \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + (1-q)^2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}{1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}.$$

Das sind gerade die Werte, die die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t + (1-q)^2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}{1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t + \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}$$

an den Stellen $t = \frac{2\varkappa\pi}{k}$ annimmt. Ihre Ableitung ist

$$\varphi'(t) = \frac{2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,(p-q)\left[1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right]}{\left[1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t+\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right]^{2}}\sin t.$$

Um zu zeigen, daß $\varphi'(t)<0$ im Intervall $0<t<\pi$, betrachten wir die Funktion

$$\psi(u) = \frac{u-1}{\sqrt[k]{u^2}}$$

für $u>0$. Deren Ableitung

$$\psi'(u) = \frac{(k-2)\,u+2}{k\,u\sqrt[k]{u^2}}$$

ist für $u>0$ positiv; $\psi(u)$ steigt also im Intervall $0<u<\infty$ monoton; daher ist für $p \lesseqgtr q$

$$\frac{p-1}{\sqrt[k]{p^2}} \lesseqgtr \frac{q-1}{\sqrt[k]{q^2}},$$

$$1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2} \gtreqless 0,$$

$$(p-q)\left[1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right]<0.$$

In $\varphi'(t)$ hat also $\sin t$ einen negativen Faktor. Daher ist $\varphi'(t)<0$, $\varphi(t)$ nimmt im Intervall $0<t<\pi$ monoton ab. Es ist also

$$|\alpha_0|^2>|\alpha_1|^2>|\alpha_2|^2>\ldots>|\alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]}|^2 \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gelten kann, wenn k gerade ist. Hieraus folgen aber die Ungleichungen (29), da die Einheitswurzeln $\varepsilon_\varkappa$ und $\varepsilon_{k-\varkappa}$ und damit auch die Zahlen $\alpha_\varkappa$ und $\alpha_{k-\varkappa}$ zueinander konjugiert komplex sind.

2. Nach (29) ist $\alpha_0 \neq 0$; daher ist nach (28) und (29)

$$\frac{a_{\sigma n}}{\alpha_0^n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}+\sum_{\varkappa=1}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\,\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n\right\}, \tag{32}$$

also für $n\to\infty$

$$\frac{a_{\sigma n}}{\alpha_0^n} \to \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k). \tag{33}$$

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß die Anfangswerte $a_{\lambda 0}$ so gewählt sind, daß

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0. \tag{34}$$

Dies trifft insbesondere in dem von Herrn KRAFFT allein betrachteten Fall zu, daß die Anfangswerte nicht negativ und nicht alle gleich Null sind. Dann folgt aus (33), daß für $n \to \infty$

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} \to \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{r}^{\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k). \tag{35}$$

Damit ist insbesondere die EULERsche Behauptung schon beinahe in größter Allgemeinheit bewiesen, denn wir werden in § 3 sehen, daß, abgesehen von einem einzigen trivialen Ausnahmefall, der überdies nur bei geradem k auftreten kann, das EULERsche Verfahren immer divergiert oder überhaupt nicht durchführbar ist, wenn die Voraussetzung (34) nicht gilt.

3. Für alle hinreichend großen n ist unter der Voraussetzung (34) $a_{1n} \neq 0$. Für diese n wird

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \left\{ 1 + \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda (\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}) \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n}{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^{\lambda-1} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n} \right\},$$

also

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} =$$

$$= \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} (\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}) \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_\varkappa^\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \varepsilon_\varkappa^{-1} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}}. \tag{36}$$

Wir machen jetzt die weitere Voraussetzung, daß insbesondere $a_{10} \neq 0$ sein soll, und führen die Zahlen $\Delta_{\lambda 0}$ durch die Gleichung

$$\frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1} = \Delta_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{37}$$

ein; $\Delta_{\lambda 0}$ ist der relative Fehler, mit dem schon $\frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}}$ die Zahl $\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1}$ annähert. Weil

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_\varkappa^\lambda = \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_\varkappa^\lambda + \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda$$

$$= \begin{cases} 0 + \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda & \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1, \\ k \sqrt[k]{\frac{p}{q}} + \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} & \text{für} \quad \varkappa = 0, \end{cases}$$

ergibt sich aus (36), daß

$$(38)\qquad \frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} (\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}) \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda}{k + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \varepsilon_\varkappa^{-1} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} \varepsilon_\varkappa^\lambda}.$$

Hiernach wird beim n-ten Schritt die Approximation von $\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1}$ durch den Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ im allgemeinen um so besser sein, je kleiner schon die absoluten Beträge der relativen Fehler $\Delta_{\lambda 0}$ sind. Es ist für jedes n

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \to 0, \text{ wenn } \sum_{\lambda=1}^{k} |\Delta_{\lambda 0}| \to 0.$$

4. Für $k = 2$ wird

$$\alpha_0 = 1 + \sqrt{pq}, \quad \alpha_1 = 1 - \sqrt{pq}$$

und nach (38) und (37) nach leichter Umformung

$$\frac{a_{2n}}{a_{1n}} - \sqrt{\frac{q}{p}} = 2\sqrt{\frac{q}{p}} \frac{\left(\frac{a_{20}}{a_{10}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)\left(\frac{1-p\sqrt{r}}{1+p\sqrt{r}}\right)^n}{\frac{a_{20}}{a_{10}} + \sqrt{\frac{q}{p}} - \left(\frac{a_{20}}{a_{10}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)\left(\frac{1-p\sqrt{r}}{1+p\sqrt{r}}\right)^n}.$$

Wird $p > \frac{1}{\sqrt{r}}$ gewählt, so schließen also je zwei aufeinander folgende Quotienten $\frac{a_{2n}}{a_{1n}}$ und $\frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}}$ die $\sqrt{\frac{q}{p}}$ ein. Für $p = 1$, also $r > 1$ hat dies schon Herr Lorey a. a. O. festgestellt.

5. Der Formel (38) entnimmt man, daß die Grenzübergänge (35) um so rascher erfolgen werden, je kleiner die Zahlen $\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|$ sind. Wir wollen jetzt zeigen, daß man in gewissem Umfang alle diese Zahlen gleichzeitig dadurch verkleinern kann, daß man die Zahlen p und q im Rahmen der Bedingung $q = pr$ geeignet wählt.

Nach (31) ist

$$\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|^2 = \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{\frac{1}{r}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + (1-rp)^2\sqrt[k]{\frac{1}{r}}^2}{1 - 2\sqrt[k]{\frac{1}{r}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{\frac{1}{r}}^2}$$

$$(39)\qquad \times \left(\frac{1 - \sqrt[k]{\frac{1}{r}}}{1 - p - (1-rp)\sqrt[k]{\frac{1}{r}}}\right)^2$$

$$= \frac{(\sqrt[k]{r} - 1)^2}{(\sqrt[k]{r} - 1)^2 + 4\sqrt[k]{r}\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}} \cdot F_\varkappa(p),$$

wobei

$$(40)\quad F_\varkappa(p) = 1 + 4\sqrt[k]{r}\,\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}\,\frac{(1-p)\,(1-rp)}{[1-\sqrt[k]{r}-p\,(r-\sqrt[k]{r})]^2}\qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Die Kurven $y = F_\varkappa(p)$ haben alle eine zur y-Achse parallele Asymptote links von der Ordinatenachse an derselben Stelle $p = p_A = \frac{1-\sqrt[k]{r}}{r-\sqrt[k]{r}}$ und alle ihre kleinste Ordinate rechts vom Nullpunkt an derselben Stelle $p = p_{\mathrm{Min}} = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$. Jede einzelne Kurve hat außerdem die Gerade

$$y = F_\varkappa(\infty) = 1 + \frac{4r\sqrt[k]{r}}{(r-\sqrt[k]{r})^2}\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}$$

zur Asymptoten. Im Intervall $-\infty < p < p_A$ steigt $F_\varkappa(p)$ monoton vom Wert $F_\varkappa(\infty)$ nach Unendlich, im Intervall $p_A < p < p_{\mathrm{Min}}$ fällt $F_\varkappa(p)$ monoton von Unendlich bis zum Minimum $\left(\cos\frac{\varkappa\pi}{k}\right)^2$. Es ist $F_\varkappa(0)$ noch größer als $F_\varkappa(\infty)$, wenn $k > 2$, und $F_\varkappa(0) = F_\varkappa(\infty)$ für $k = 2$. Im Intervall $p_{\mathrm{Min}} < p < \infty$ steigt $F_\varkappa(p)$ vom Kleinstwert $\left(\cos\frac{\varkappa\pi}{k}\right)^2$ wieder monoton zum Wert $F_\varkappa(\infty)$ an. Zwischen $p = 1$ und $p = \frac{1}{r}$ bleibt $F_\varkappa(p)$ unterhalb 1.

Hiernach wird die Konvergenz des Eulerschen Verfahrens besonders gut, wenn man

$$p \sim \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}},\quad q = rp \sim r\,\frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$$

wählt, d. h. angenähert gleich den Werten, für welche nach (30) für gerades k $\alpha_{\frac{k}{2}} = 0$ wird. Nach (39) ist es unter diesen Bedingungen außerdem vorteilhaft, wenn r nahe bei 1 liegt, weil dann auch der von p freie Bestandteil von $\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|$ klein wird.

6. Diese letzte Feststellung legt es nahe, das Eulersche Verfahren dadurch zu verbessern, daß man nicht mit konstantem p und q operiert, sondern mit veränderlichen p_n und q_n, also im Falle $k = 2$

$$a_{1,n+1} = a_{1n} + p_n a_{2n},\quad a_{2,n+1} = q_n a_{1n} + a_{2n}$$

setzt und p_n und q_n durch das Verfahren selbst verbessert; die Forderung, daß

$$q_n \sim r\,\frac{1+\sqrt{r}}{r+\sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

sein soll, kann man durch den Ansatz

$$q_n = \frac{a_{2n}}{a_{1n}}$$

befriedigen und $p_n = \frac{q_n}{r}$ setzen. Dann wird

$$\frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} = \frac{2\,a_{1n}\,a_{2n}\,r}{a_{1n}^2\,r + a_{2n}^2}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $c_n = a_{2n}/a_{1n}$ einführt,

$$c_{n+1} = \frac{2\,c_n\,r}{r + c_n^2}.$$

Diese Abwandlung des Eulerschen Verfahrens führt also gerade auf das Heronsche Verfahren der Quadratwurzelberechnung. Dessen Konvergenz ist in der Tat besser als diejenige des Eulerschen Verfahrens; beim Heronschen Verfahren ist nämlich der relative Fehler der folgenden Näherung immer proportional der zweiten Potenz des relativen Fehlers der vorangehenden Näherung, beim Eulerschen Verfahren ist er dagegen, wie ein Blick auf Formel (38) zeigt, nur proportional der ersten Potenz des relativen Fehlers der vorangehenden Näherung.

Wenn $k > 2$ ist, führt die entsprechende Abänderung des Eulerschen Verfahrens einerseits zu unhandlicheren Formeln, andererseits aber auch nicht zu einer solch wesentlichen Verbesserung der Konvergenz, wie sie sich im Falle $k = 2$ ergibt. Doch darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Es mag nur noch bemerkt werden, daß bezüglich der Raschheit der Konvergenz das Eulersche Verfahren dem Heron-Newtonschen Verfahren[4]) und erst recht dem Lambertschen Verfahren[5]) zur Berechnung von $\sqrt[k]{r}$ unterlegen ist; seine Besonderheit ist darin zu sehen, das es die Zahlen $\sqrt[k]{r}$, $\sqrt[k]{r^2}$, ..., $\sqrt[k]{r^{k-1}}$ gleichzeitig liefert.

---

[4]) Beim Heron-Newton'schen Verfahren ist $x_0 > 0$, sonst beliebig,

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k}\,x_n + \frac{r}{k\,x_n^{k-1}} \qquad \text{für } n \geqq 0,$$

$x_n \to \sqrt[k]{r}$ und

$$(*) \qquad 0 < \frac{x_n - \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}} < \frac{2}{k-1}\left[\frac{k-1}{2}\,\frac{x_0 - \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}}\right]^{2^n} \qquad \text{für } n \geqq 1.$$

Die Abschätzung (*) steht bei C. Schmidt, Über einen Algorithmus zur Berechnung der n^{ten} Wurzel aus a. Math. Annalen **45**, 1894, S. 301—308. Vgl. auch Z. Chajoth, Heronische Näherungsbrüche. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **42**, 1930, S. 130—135.

[5]) J. H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. Zweyter Theil. Erster Abschnitt. Berlin 1770, S. 152—153. Wegen der Einzelheiten vgl. M. Müller, Lamberts Verfahren zur Gleichungsauflösung. (Noch nicht veröffentlicht.)

§ 3.

Fortsetzung. Die bisher ausgeschlossenen Ausgangswerte.

1. Jetzt wollen wir zusehen, was eintritt, wenn die Bedingung (34) verletzt ist. Ist $a_{10} = a_{20} = \ldots = a_{k0} = 0$, so wird nach (3) auch $a_{1n} = a_{2n} = \ldots = a_{kn} = 0$ für alle positiven n, dann verliert die Eulersche Aussage ihren Sinn. Wir werden also voraussetzen, daß nicht alle Ausgangswerte gleich Null sind. Das bedingt, daß nicht alle Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{41}$$

verschwinden, da die Determinante des Gleichungssystems

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \left(a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \right) = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1)$$

von Null verschieden ist. Da $\varepsilon_{\varkappa}$ und $\varepsilon_{k-\varkappa}$ zu einander konjugiert-komplex und die Zahlen $a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}$ reell sind, muß dann schon unter den $\left[\frac{k}{2}\right]$ ersten der Summen (41) eine von Null verschieden sein.

2. Bei unseren weiteren Betrachtungen benutzen wir die Funktionen

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos\left(\frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} + t \right) \tag{42}$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1;\ \sigma = 1, 2, \ldots, k)$$

und folgende ihrer Eigenschaften:

Es ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \tag{43}$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos \frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} \right) \cos t - \left(\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \sin \frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\varkappa}{k} \right) \sin t$$

$$= f_{\varkappa\sigma}(0) \cos t + f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin t,$$

$$M_{\varkappa\sigma} = \max_{-\infty < t < \infty} f_{\varkappa\sigma}(t) = \sqrt{f_{\varkappa\sigma}(0)^2 + f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \tag{44}$$

$$\min_{-\infty < t < \infty} f_{\varkappa\sigma}(t) = -M_{\varkappa\sigma}.$$

Ist $M_{\varkappa\sigma} > 0$, so ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = M_{\varkappa\sigma} \cos(t + P_{\varkappa\sigma}), \tag{45}$$

wo die Phasenverschiebung $P_{\varkappa\sigma}$ durch die Bedingungen

$$\cos P_{\varkappa\sigma} = \frac{f_{\varkappa\sigma}(0)}{M_{\varkappa\sigma}}, \quad \sin P_{\varkappa\sigma} = -\frac{f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{M_{\varkappa\sigma}}, \quad 0 \leqq P_{\varkappa\sigma} < 2\pi \tag{46}$$

eindeutig festgelegt ist. Setzen wir $P_{\varkappa\sigma} = 0$, falls $M_{\varkappa\sigma} = 0$, so gilt ausnahmslos die Formel (45).

Es ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos\left(\frac{2\varkappa(\lambda-1)\pi}{k} - \frac{2\varkappa(\sigma-1)\pi}{k} + t\right),$$

d. h.

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = f_{\varkappa 1}(t - d_{\varkappa\sigma}) = M_{\varkappa 1} \cos(t - d_{\varkappa\sigma} + P_{\varkappa 1}), \tag{46}$$

wenn

$$\frac{2\varkappa(\sigma-1)\pi}{k} = d_{\varkappa\sigma} \tag{47}$$

gesetzt wird.

3. Ist $\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} = 0$, so ist auch für $\sigma = 1, 2, \ldots, k$

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma} = f_{\varkappa\sigma}(0) - i f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

d. h. $f_{\varkappa\sigma}(0) = 0$ und $f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ist aber $\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \neq 0$, so ist auch für $\sigma = 1, 2, \ldots, k$

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon^{\lambda-\sigma} \neq 0$$

und $M_{\varkappa\sigma} > 0$.

4. Für die weitere Untersuchung müssen wir auch die Funktionen

$$\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa}(p) = \arg \alpha_{\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1;\ 0 \leqq \omega_{\varkappa} < 2\pi) \tag{48}$$

genauer kennen. Da $\alpha_{\varkappa} = \bar{\alpha}_{\varkappa-k}$ ist, genügt es, diese Funktionen für die Nummern $\varkappa = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]$ zu untersuchen.

Nach (17) und (15) ist

$$\alpha_{\varkappa} = \frac{\left[(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r} - \cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right) + (1-rp)\left(1 - \sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)\right]}{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r^2}} +$$

$$+ i\,\frac{p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}}{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r^2}}. \tag{49}$$

Hiernach ist

$$\alpha_0 = 1 + p\,\frac{\sqrt[k]{r} - r}{1 - \sqrt[k]{r}} > 1 > 0; \quad \omega_0 = 0 \tag{50}$$

und, falls k gerade, $k = 2h$ ist,

$$\alpha_h = 1 - p\,\frac{\sqrt[k]{r} + r}{1 + \sqrt[k]{r}} \gtreqless 0 \quad \text{für} \quad p \lesseqgtr \frac{1 + \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r} + r},$$

also

$$\omega_{\frac{k}{2}} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{für } p \lessgtr \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r}. \tag{51}$$

Für $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r}$ ist $\omega_{\frac{k}{2}}$ an und für sich unbestimmt; wir wollen

$$\omega_{\frac{k}{2}} = 0 \quad \text{für } p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r} \tag{52}$$

setzen.

Ist $0 < \varkappa < \frac{k}{2}$, so ist nach (29) $|\alpha_\varkappa| > 0$ und daher nach (49) und (31)

$$\frac{\alpha_\varkappa}{|\alpha_\varkappa|} = \frac{\left[(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(1-rp)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)\right]+i\left[p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}\right]}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp)^2}}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega_\varkappa &= \\ &= \frac{(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(1-rp)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp)^2}} \\ \sin\omega_\varkappa &= \\ &= \frac{p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Wir wollen

$$\Phi_\varkappa(p) = \frac{(p-1)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(rp-1)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)}{\sqrt{(p-1)^2\sqrt[k]{r^2}-2(p-1)(rp-1)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(rp-1)^2}}$$

setzen, sodaß

$$\cos\omega_\varkappa = -\frac{\Phi_\varkappa(p)}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}}$$

wird. Es ist

$$\Phi'_\varkappa(p) = \frac{p\sqrt[k]{r^2}(1-r)^2\sin^2\frac{2\varkappa\pi}{k}}{\sqrt{(p-1)^2\sqrt[k]{r^2}-2(p-1)(rp-1)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(rp-1)^2}^3} > 0$$

für $p > 0$. Da

$$\Phi_\varkappa(0) = -\sqrt{\sqrt[k]{r}^2 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + 1},$$

$$\Phi_\varkappa(\infty) = \lim_{p\to\infty}\Phi_\varkappa(p) =$$

$$= \frac{\sqrt[k]{r}^2 - (1+r)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}{\sqrt{\sqrt[k]{r}^2 - 2r\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}} > -|\sqrt[k]{r} - 1|,$$

ist für $0 < p < \infty$

$$1 > \cos\omega_\varkappa$$

$$(54)\qquad > -\frac{\sqrt[k]{r}^2 - (1+r)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}{\sqrt{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r}^2}\ \sqrt{r^2 - 2r\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r}^2}} = g_\varkappa$$

und dabei $g_\varkappa > 1$. Aus (53) und (54) ergibt sich: $\omega_\varkappa = \omega_\varkappa(p)$ durchläuft, wenn p von 0 bis ∞ wächst, stetig das Intervall

$$0 < \omega_\varkappa < \overline{\arccos}\ g_\varkappa < \pi, \text{ falls } r > 1,$$

aber das Intervall

$$2\pi > \omega_\varkappa > 2\pi - \overline{\arccos}\ g_\varkappa > \pi, \text{ falls } 0 < r < 1.$$

5. Ist k ungerade, $k = 2h+1$, so ist nach (28)

$$a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_k^n +$$

$$+ \sum_{\varkappa=h+1}^{2h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n\Big\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n +$$

$$+ \sum_{\varkappa'=h}^{1}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_{2h+1-\varkappa'}^{\lambda-\sigma}\alpha_{2h+1-\varkappa'}^n\Big\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}(\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \varepsilon_{2h+1-\varkappa}^{\lambda-\sigma}\alpha_{2h+1-\varkappa}^n)\Big\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}(\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \bar{\varepsilon}_\varkappa^{\lambda-\sigma}\bar{\alpha}_\varkappa^n)\Big\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}|\alpha_\varkappa|^n\cos\Big(\frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} +$$

$$+ n\omega_\varkappa\Big)\Big\},$$

also mit Rücksicht auf (42) und (50)

$$(55)\qquad a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{r}^{-\sigma}\{f_{0\sigma}(0)|\alpha_0|^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h} f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa)|\alpha_\varkappa|^n\}.$$

Ist k gerade, $k = 2h$, so ergibt sich entsprechend mit Berücksichtigung von (50), (51) und (52), daß

$$(56) \quad a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}\left\{f_{0\sigma}(0)\,|\alpha_0|^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h-1} f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa)\,|\alpha_\varkappa|^n + f_{h\sigma}(n\omega_h)\,|\alpha_h|^n\right\}.$$

6. Wir wenden uns jetzt der Frage nach dem infinitären Verhalten der $a_{\sigma n}$ zu und behandeln zunächst den Fall $k = 2h+1$. Es sei nunmehr, nachdem der Fall

$$f_{0\sigma}(0) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0$$

bereits in § 2 erledigt wurde, eine ganze Zahl K vorhanden, sodaß $1 \leqq K \leqq h$ und

$$(57) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, K-1, \\ \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_K^\lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist $f_{\varkappa\sigma}(0) = 0$ und $f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und daher nach (43) auch $f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa) = 0$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, K-1$, aber $M_{K\sigma} > 0$ und daher nach (45) $f_{K\sigma}(t)$ nicht konstant und insbesondere nicht ständig gleich Null. Nach (55) und (29a) ist für $n \to \infty$

$$(58) \quad \frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} = \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}\,f_{K\sigma}(n\omega_K) + o(1)\,^6).$$

Es ist also

$$(59) \quad -\frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}\,M_{K\sigma} \leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} \leqq \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}\,M_{K\sigma}.$$

Wir bezeichnen den kleinsten nicht-negativen Rest von β mod 2π mit $R(\beta)$.

Es sei T im Intervall $0 \leqq T < 2\pi$ beliebig gewählt und p eine positive Zahl, für welche $\omega_K = \omega_K(p)$ ein irrationales Vielfaches von 2π ist. Dann liegen bekanntlich die Reste $R(n\omega_K)$ im Intervall $\langle 0, 2\pi\rangle$ überall dicht[7]). Wir können eine Nummernteilfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\mu, \ldots$, die von T, aber nicht von σ abhängig ist, bei der also $n_\mu = n_\mu(T)$ ist, derart finden, daß für $\mu \to \infty$

$$R(n_\mu\omega_K) \to T$$

und damit

$$f_{K\sigma}(n_\mu\omega_K) = f_{K\sigma}(R(n_\mu\omega_K)) \to f_{K\sigma}(T)$$

und

$$(60) \quad \frac{a_{\sigma n_\mu}}{|\alpha_K|^{n_\mu}} \to \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}\,f_{K\sigma}(T).$$

---

[6]) Für $K = h$ ist $o(1) \equiv 0$.

[7]) Vgl. z. B. O. Perron, Irrationalzahlen. (1. Aufl. 1929, 2. Aufl. 1939), S. 143/4.

Da hierbei $f_{K\sigma}(T)$ jeden Wert zwischen $-M_{K\sigma}$ und $M_{K\sigma}$ haben kann, und $M_{K\sigma}>0$ ist, ist unter den gegenwärtigen Voraussetzungen also die Folge $\{a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ gewiß nicht konvergent; sie hat vielmehr alle Zahlen des Intervalles $\left\langle -\frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}M_{K\sigma},\ \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}M_{K\sigma}\right\rangle$ zu Häufungswerten.

Nun sei p so beschaffen, daß $\omega_K(p)$ ein rationales Vielfaches von 2π, etwa

$$\omega_K = \omega_K(p) = 2\pi\frac{u}{v} \qquad (u, v \text{ ganz und relativ prim, } v>0) \tag{61}$$

ist[8]). Nach Nr. 4 ist

$$\begin{cases} 0<u<\dfrac{v}{2\pi}\,\overline{\arccos}\ g_K<\dfrac{v}{2} & \text{für } r>1,\\ v>u>v\left(1-\dfrac{1}{2\pi}\,\overline{\arccos}\ g_K\right)>\dfrac{v}{2} & \text{für } 0<r<1, \end{cases} \tag{62}$$

wo g_K die in (54) definierte Zahl ist. Als Werte von $R(n\omega_K)$ kommen genau die Zahlen $0\cdot\frac{2\pi}{v}$, $1\cdot\frac{2\pi}{v}$, ..., $(v-1)\cdot\frac{2\pi}{v}$ in Betracht. Ist $R(m\omega_K)=R_m$ für $m=0, 1, \ldots, v-1$, so ist auch $R(n\omega_K)=R_m$, wenn $n=m+\mu v$ ($\mu=1, 2, 3, \ldots$), also nach (45) auch

$$f_{K\sigma}(n\omega_K)=f_{K\sigma}(R(n\omega_K))=f_{K\sigma}(R_m)$$

und nach (58) für $\mu\to\infty$

$$\frac{a_{\sigma,\,m+\mu v}}{|\alpha_K|^{m+\mu v}}\to\frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}f_{K\sigma}(R_m) \qquad (m=0, 1, \ldots, v-1).^{9}) \tag{63}$$

Da bei der Voraussetzung (57) die Funktion $f_{K\sigma}(t)$ nicht konstant ist, nimmt sie, wie man ihrer Darstellung (45) entnimmt, im Intervall $0\leqq t<2\pi$ jeden Wert genau zweimal an. Da die Zahlen R_m untereinander verschieden sind, kann in (63) auf der rechten Seite höchstens dann für $m=0, 1, 2, \ldots, v-1$ derselbe Grenzwert stehen, wenn $v=2$ ist. Dann gibt es aber keine ganze Zahl u, die die Ungleichungen (62) befriedigt, also keine Zahl u, wie sie die Darstellung (61) verlangt. Also treten in (63) mindestens zwei verschiedene Grenzwerte auf. Auch in diesem Fall konvergiert die Folge $\{a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ gewiß nicht.

7. Ist k gerade, $k=2h$, so gilt wörtlich dasselbe, solange $1\leqq K\leqq h-1$ ist. Ist $K=h$, so sind nach (57) die Ausgangswerte die Zahlen $a_{\lambda 0}=\frac{(-1)^\lambda}{k}\sqrt[k]{r^{\lambda}}C$, wo C eine beliebige von Null verschiedene Zahl sein darf. Nach (56) wird

$$a_{\sigma n}=\frac{1}{k}\sqrt[h]{r^{\sigma}}f_{h\sigma}(n\omega_h)\,|\alpha_h|^n.$$

---

[8]) Man beachte, daß ω_K und damit u und v von σ unabhängig ist.

[9]) Wenn $K=h$ ist, kann hier der Pfeil durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden.

Ist $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, so ist nach (29) und (30) $\alpha_h = 0$ und damit $a_{\sigma n} = 0$ für $n \geqq 1$. Der Quotient $\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_h|^n}$ kann in diesem Fall nicht gebildet werden. Ist $p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, so ist $|\alpha_h| > 0$ und nach (51) $\omega_h = 0$, bzw. $= \pi$ und damit nach (43)

$$f_{h\sigma}(n\omega_h) = f_{h\sigma}(0)\cos(n\omega_h) = f_{h\sigma}(0), \text{ bzw. } = (-1)^n f_{h\sigma}(0)$$

und dabei

$$f_{h\sigma}(0) = \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^{\lambda-\sigma} a_{\lambda v} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0.$$

Es wird

$$\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} = (\pm 1)^n \frac{1}{k} \sqrt[k]{r}^{\sigma} f_{K\sigma}(0) \quad \text{für} \quad p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}.$$

In diesem Fall ist somit die Folge $\{a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ je nach der Wahl von p konvergent oder divergent, oder sie kann überhaupt nicht gebildet werden.

8. Wir kommen zur Untersuchung des infinitären Verhaltens der Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$. Wir beginnen mit dem zuletzt betrachteten Fall: Ist k gerade und $K = \frac{k}{2}$, so ist

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{r}^{\sigma-1} \quad \text{für} \quad p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}. \tag{64}$$

Wenn $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, ist $a_{1n} = a_{\sigma n} = 0$ für $n \geqq 1$, kann also der Quotient $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ nicht gebildet werden.

9. Nun sei k beliebig und $0 < K < \frac{k}{2}$. Dann gibt es mindestens drei verschiedene Stellen t_1, t_2, t_3 im Intervall $0 \leqq t < 2\pi$, für welche eine von σ unabhängige Teilfolge $\{n_{i\mu}\}$ derart existiert, daß für $\mu \to \infty$

$$\frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_K|^{n_{i\mu}}} \to \frac{2}{k} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma} f_{K\sigma}(t_i) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, 3). \tag{65}$$

Ist nämlich $\omega_K(p)$ rationales Vielfaches von 2π und durch (61) dargestellt, so ist nach (62) $v \geqq 3$, so gibt es also mindestens drei verschiedene Reste R_0, R_1, R_2, für welche (63) gilt; die Zahlen $t_i = R_{i-1}$ und die Folgen mit den Elementen $n_{i\mu} = i-1+\mu v$ leisten das Gewünschte. Ist aber $\omega_K(p)$ irrationales Vielfaches von 2π, so erfüllen je drei verschiedene Stellen t_i mit den ihnen zugeordneten Folgen mit den Elementen $n_\mu(t_i) = n_{i\mu}$ die Bedingung (65).

Wenn nun $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ existieren und gleich G_σ sein soll, so muß auch $\lim_{\mu\to\infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{a_{1 n_{i\mu}}}$ existieren und gleich G_σ sein. Wenn $f_{K,1}(t_i) \neq 0$ ist,

muß dann nach (65)

$$G_\sigma = \lim_{\mu \to \infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}} / |\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}{a_{1 n_{i\mu}} / |\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}} = \frac{\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}}{\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{a_{1 n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}} = \sqrt[k]{r}^{\sigma-1} \frac{f_{K\sigma}(t_i)}{f_{K1}(t_i)},$$

d. h.

$$\sqrt[k]{r}^{\sigma-1} f_{K\sigma}(t_i) = G_\sigma f_{K1}(t_i) \tag{66}$$

sein. Wenn aber $f_{K1}(t_i) = 0$ ist, muß auch $f_{K\sigma}(t_i) = 0$ sein, da andernfalls nach (65) für hinreichend große μ die Zahlen $\left| \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}} \right|$ oberhalb einer positiven Schranke blieben, $\frac{a_{1 n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}$ aber der Null beliebig nahe käme, $\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{a_{1 n_{i\mu}}}$ also nicht existieren würde. Die Beziehung (66) muß also ausnahmslos gelten.

Setzt man

$$G_\sigma \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma-1} = G'_\sigma, \quad t_i - P_{K1} = \Theta_i,$$

so muß mit Rücksicht auf (46), weil $M_{K\sigma} > 0$ und damit auch $M_{K1} > 0$ ist,

$$\cos(\Theta_i - d_{K\sigma}) = G'_\sigma \cos \Theta_i$$

oder

$$(\cos d_{K\sigma} - G'_\sigma) \cos \Theta_i - \sin d_{K\sigma} \sin \Theta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sein. Die Determinante der i-ten und der j-ten dieser drei Gleichungen

$$\cos \Theta_i \sin \Theta_j - \sin \Theta_i \cos \Theta_j = \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

kann nicht für alle drei Kombinationen (Θ_i, Θ_j) der drei Zahlen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ verschwinden, da $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ untereinander verschieden und der Ungleichung $-P_{K1} \leqq \Theta_i < -P_{K1} + 2\pi$ unterworfen sind. Also muß

$$\cos d_{K\sigma} = G_\sigma, \quad \sin d_{K\sigma} = 0,$$

insbesondere also nach (47)

$$\frac{2K(\sigma-1)\pi}{k} = \eta_\sigma \pi$$

sein, wo η_σ eine ganze Zahl ist. Aus der Bedingung $2K(\sigma-1) = \eta_\sigma k$ folgt, daß $\eta_{\sigma+1} > \eta_\sigma$, $\eta_1 = 0$, d. h. $\eta_2 \geqq 1$, also $\eta_3 > \eta_2 \geqq 1$, d. h. $\eta_3 \geqq 2$, usw., allgemein

$$\eta_\sigma \geqq \sigma - 1$$

sein muß, wenn die Folge $\left\{\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}\right\}$ konvergieren soll. Weil $0 < K < \frac{k}{2}$ vorausgesetzt war, ist aber

$$\eta_\sigma = \frac{2K}{k}(\sigma-1) < \sigma - 1$$

für $\sigma \geqq 2$. Für $\sigma \geqq 2$ ist also keine der Folgen $\left\{\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}\right\}$ konvergent.

10. Abschließend können wir feststellen: Der in § 2 untersuchte und der in § 3, Nr. 8 festgestellte sind die einzigen Fälle, in welchen die Folgen $\left\{\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}\right\}$ $(\sigma = 2, 3, \ldots, k)$ konvergieren und dann die in (2) angegebenen Grenzwerte haben. Sie liegen vor, wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0,$$

bzw. wenn k gerade und

$$p \neq \frac{1 + \sqrt[k]{r}}{r + \sqrt[k]{r}}$$

ist und als Ausgangswerte speziell die Zahlen

$$a_{\lambda 0} = \frac{(-1)^{\lambda}}{k} \sqrt[k]{r}^{\lambda} C$$

(C eine beliebige von Null verschiedene Konstante) gewählt sind. Bei jeder anderen Wahl der Ausgangswerte $a_{10}, \ldots, a_{k0}$ ist das Eulersche Verfahren divergent oder überhaupt nicht durchführbar.

(Eingegangen am 6. Februar 1947.)

Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Neuerdings hat ABELLANAS[1]) für einfache Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit Reihenentwicklungen der Koordinaten nach Ortsuniformisierenden hergeleitet und mit ihrer Hilfe bewiesen, daß meine Definition des Begriffes einfacher Punkt[2]) einer von ZARISKI[3]) gegebenen Definition äquivalent ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Reihenentwicklung etwas einfacher hergeleitet werden kann, wenn man nach LIOUVILLE statt der einzelnen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Linearkombination $u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$ einführt und diese in eine Potenzreihe entwickelt. Mit derselben Methode zeigen wir, daß die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von M differenzierbare Funktionen der Ortsuniformisierenden eines einfachen Punktes η sind, deren Ableitungen an der Stelle η endlich bleiben. Schließlich geben wir einen direkten Beweis für die Äquivalenz unserer Einfachheitsdefinition mit der von ZARISKI. Der Grundkörper wird immer als perfekt vorausgesetzt.

§ 1.

Herleitung der Potenzreihenentwicklung.

Wir gehen von der zugeordneten Form $F(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(d)})$ einer irreduziblen d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in S_n aus.[4]) Sie ist ganzrational und symmetrisch in den Hyperebenen $u^{(0)}, \ldots, u^{(d)}$ und zerfällt als Funktion der $u = u^{(0)}$ in Primfaktoren, die den Schnittpunkten der Hyperebenen $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$ mit M entsprechen:

$$(1) \qquad F(u; u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}) = \prod_{\nu} (u_0\xi_0^{(\nu)} + u_1\xi_1^{(\nu)} + \cdots + u_n\xi_n^{(\nu)}).$$

Ersetzen wir $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$ durch spezielle Hyperebenen, die die Mannigfaltigkeit M in endlich vielen Punkten $\eta^{(\nu)}$ schneiden, so gilt die Zerlegung (1) immer noch:

$$(2) \qquad F(u; v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}) = \prod_{\nu} (u_0\eta_0^{(\nu)} + u_1\eta_1^{(\nu)} + \cdots + u_n\eta_n^{(\nu)})$$

---

[1]) P. ABELLANAS, Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **36**, 482—499 (1942).

[2]) Siehe etwa B. L. VAN DER WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, § 38.

[3]) O. ZARISKI, Ann. of Math. (2) **40**, 639—689 (1939).

[4]) CHOW und VAN DER WAERDEN, ZAG 9. Math. Ann. **113**, (1937) S. 692.

und die $\eta^{(\nu)}$ erscheinen rechts mit ihren richtigen Vielfachheiten. Ist nun η ein einfacher Punkt von M und wählt man η als Koordinatenanfangspunkt $(1, 0, \ldots, 0)$, so kann man die Koordinaten so numerieren, daß die Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ mit dem Tangentialraum von M nur den Punkt η gemeinsam haben. Setzt man dann in (2) für $v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ diese Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots. x_d = 0$, so spaltet $F(u; v^{(1)}, \ldots, v^{(d)})$ einen einfachen Faktor u_0, dem einfachen Schnittpunkt $\eta = (1, 0, \ldots, 0)$ entsprechend, ab. Setzt man in (2) allgemeiner für $v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ die Hyperebenen

$$(3) \qquad x_1 - t_1 x_0 = 0,\ x_2 - t_2 x_0 = 0,\ \ldots,\ x_d - t_d x_0 = 0,$$

so erhält man aus (2) eine Form

$$(4) \qquad F(u_0, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_d) = \prod_{\nu} (u_0 \eta_0^{(\nu)} + u_1 \eta_1^{(\nu)} + \cdots + u_n \eta_n^{(\nu)}),$$

die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ einen einfachen Faktor u_0 abspaltet:

$$F(u_0, \ldots, u_n;\ 0, \ldots, 0) = u_0 \cdot h(u_0, \ldots, u_n).$$

Nun wenden wir eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas an:

Lemma: *Wenn ein Polynom $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in zwei teilerfremde Faktoren $g(u_0) \cdot h(u_0)$ zerfällt, so zerfällt es für unbestimmte $t_1, \ldots, t_d$ in zwei Faktoren $G(u_0) \cdot H(u_0)$ deren Koeffizienten Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind und die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in $g(u_0)$ und $h(u_0)$ übergehen, wobei $G(u_0)$ denselben Grad hat wie $g(u_0)$.*

Den Beweis dieses Lemmas findet man bei Abellanas; er verläuft genau so wie im Fall einer Veränderlichen t_1. Der Beweis ist übrigens besonders einfach in dem hier vorliegenden besonderen Fall $g(u_0) = u_0$, da man dann nur anzusetzen braucht

$$G(u_0) = u_0 - (P_1 + P_2 + \cdots)$$

wo $P_1, P_2, \ldots$ Polynome vom Grade 1, 2, ... in $t_1, \ldots, t_d$ sind und so bestimmt werden, daß die Potenzreihe $P_1 + P_2 + \cdots$ eine Nullstelle von $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ wird:

$$(5) \qquad F(P_1 + P_2 + \cdots;\ t_1, \ldots, t_d) = 0.$$

Entwickelt man in (5) beide Seiten nach Gliedern steigenden Grades in $t_1, \ldots, t_d$, so erhält man eine Reihe von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \alpha P_1 + Q_1 \qquad &= 0 \\ \alpha P_2 + \beta P_1^2 + \cdots &= 0 \\ \ldots\ldots & \end{aligned}$$

aus denen man sukzessiv $P_1, P_2, \ldots$ rational ausrechnen kann. Als Nenner erscheint dabei nur der Koeffizient α des Gliedes u_0 in $F(u_0; 0, \ldots, 0)$, der nach Voraussetzung nicht verschwindet.

Unser Beweis ergibt noch folgenden Zusatz: Enthält F außer u_0, noch $u_1, \ldots, u_n$, so sind auch $P_1, P_2, \ldots$ rationale Funktionen von $u_1, \ldots, u_n$.

In unserem Fall sind, wie sich aus der Zerlegung (4) ergibt, alle Nullstellen von $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ Linearformen in $u_1, \ldots, u_n$; also muß auch $P_1 + P_2 + \cdots$ eine Linearform in $u_1, \ldots, u_n$ sein:

$$P_1 + P_2 + \cdots = \sum_1^n - \xi_k u_k$$

wo $\xi_1, \ldots, \xi_n$ natürlich wieder Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind. Setzt man noch $\xi_0 = 1$, so sieht man, daß das Polynom (4) einen Linearfaktor

$$u_0 - (P_1 + P_2 + \cdots) = \xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n$$

hat, wobei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind, die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in Null übergehen. Der Punkt ξ ist dabei einer von den Schnittpunkten $\eta^{(\nu)}$ der Hyperebene (3) mit M; daraus folgt wegen $\xi_0 = 1$ unmittelbar:

$$\xi_1 = t_1, \ \xi_2 = t, \ \ldots, \ \xi_d = t_d.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Die Mannigfaltigkeit M besitzt einen allgemeinen Punkt dessen Koordinaten Potenzreihen in den „Ortsuniformisierenden“ $t_1, \ldots, t_d$ sind, welche für $t_1 = 0, \ldots, t_d = 0$ in die Koordinaten des gegebenen einfachen Punktes η übergehen, und zwar können bei geeigneter Numerierung der Koordinaten mit der Normierung $\xi_0 = 1$ die ersten d Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_d$ selbst als Ortsuniformisierende verwendet werden.*

§ 2.

Differentiation nach den Ortsuniformisierenden.

Wie wir sahen, hat $F(u_0, u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_d)$ als Polynom in u_0 eine einfache Nullstelle $\vartheta = -\xi_1 u_1 - \cdots - \xi_n u_n$. Da die Nullstelle einfach ist, ist die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial u_0}(\xi) \neq 0$, und das bleibt richtig für $t_1 = 0, \ldots, t_d = 0$. Demnach ist ϑ eine separable Funktion von $u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_d$ und man kann die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t_k}(\vartheta)}{\frac{\partial F}{\partial u_0}(\vartheta)}$$

definieren. Ersetzt man eine Unbestimmte u_i durch $u_i - 1$, bildet also

$$\vartheta + \xi_i = -\xi_1 u_1 - \cdots - \xi_i(u_i - 1) - \cdots - \xi_n u_n,$$

so ist $\vartheta + \xi_i$ ebenfalls eine separable, differenzierbare Funktion, und dasselbe gilt folglich von der Differenz

$$(\vartheta + \xi_i) - \vartheta = \xi_i.$$

Die partiellen Ableitungen der ξ_i nach den t_k existieren also sämtlich, und man kann sie als rationale Funktionen von $u_1, \ldots, u_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ darstellen, deren Nenner für $\xi = \eta$ nicht verschwinden:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k} = \frac{g(u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)}{h(u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)}.$$

Die linke Seite hängt von $u_1, \ldots, u_n$ gar nicht ab. Ordnet man also rechts Zähler und Nenner nach Potenzprodukte der $u_1, \ldots, u_n$, so sind die Koeffizienten dieser Potenzprodukte proportional und man kann die linke Seite als Quotient irgend zweier solcher Koeffizienten darstellen.

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k} = \frac{g_\nu(\xi)}{h_\nu(\xi)}. \tag{6}$$

Man kann diese Darstellung sogar so erwählen, daß der Nenner nicht Null wird für $\xi = \eta$:

$$h_\nu(\eta) \neq 0.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Die Koordinaten ξ_i sind separable algebraische Funktionen von den Ortsuniformisierenden t_k. Ihre partiellen Ableitungen lassen sich als Quotienten* (6) *so darstellen, daß der Nenner an der Stelle η nicht Null wird.*

§ 3.

Die Zariskische Definition eines einfachen Punktes.

Die Zariskische Definition heißt so: η ist ein einfacher Punkt der d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{m}$, wenn in dem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ das zum Punkt η gehörige Primideal $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ sich als isolierte Primärkomponente eines Primideals mit einer d-gliedrigen Basis darstellen läßt:

$$(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_d) = [\bar{\mathfrak{p}}, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_r] \qquad \text{mit } \bar{q}_k \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}). \tag{7}$$

Löst man die Restklassen nach $\mathfrak{m}$ in ihre Elemente auf, so kann man statt (7) auch schreiben

$$(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d) = [\mathfrak{p}, q_1, \ldots, q_r] \qquad \text{mit } q_k \not\equiv 0(\mathfrak{p}).$$

wobei $\mathfrak{p}$ das zum Punkt η gehörige Primideal ist:

$$\mathfrak{p} = (x_1 - \eta_1, \ldots, x_n - \eta_n).$$

Dazu ist nach Mod. Alg. II, § 96 notwendig und hinreichend, daß in dem Ideal $(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d)$ solche Formen vorkommen, deren Tangentialhyperebenen im Punkt η nur den Punkt η gemeinsam haben. Wenn

das der Fall ist, so hat der Punkt η als Schnittpunkt von M mit den Hyperflächen $f_1 = 0, \ldots, f_d = 0$ nach einem bekannten Kriterium (ZAG 5, Math. Ann. 110, oder Einf. alg. Geom. § 39) die Multiplizität Eins, also ist η dann auch ein einfacher Punkt in unserem Sinne.

Nun sei umgekehrt η ein einfacher Punkt in unserem Sinne. Wir wählen für η wieder den Koordinatenanfangspunkt und numerieren die Koordinaten so, daß die Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ mit dem Tangentialraum von M nur den Punkt η gemeinsam haben. Der Tangentialraum S_d war (Einf. alg. Geom. § 40) definiert als Durchschnitt aller Tangentialhyperebenen von Hyperflächen durch M. Unter diesen Tangentialhyperebenen gibt es $n-d$ linear Unabhängige, deren Durchschnitt genau S_d ist. Diese seien etwa die Tangentialhyperebenen der Hyperflächen $f_{d+1} = 0, \ldots, f_n = 0$.

Weiter setzen wir $f_1 = x_1, \ldots, f_d = x_d$. Dann haben die Tangentialhyperebenen der Hyperflächen $f = 0, \ldots, f_d = 0, f_{d+1} = 0, \ldots, f_n = 0$ im Punkt η nur den Punkt η miteinander gemeinsam. Daraus folgt nach dem zitierten Satz (Mod. Alg. II, § 96), daß $\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine isolierte Primärkomponente des Ideals $(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d)$ ist, d. h. η ist einfach im Sinne der Definition von ZARISKI.

(Eingegangen am 5. März 1945.)

Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Einleitung.

Wenn man die grundlegenden Abhandlungen der italienischen Schule über die Geometrie auf einer algebraischen Fläche liest, wo von linearen Scharen und Vollscharen, von virtuellen und effektiven Multiplizitäten von Basispunkten die Rede ist, so kommt man zwangsläufig auf die Frage, wie man die darin vorkommenden Begriffe einfach, exakt und verallgemeinerungsfähig fassen könnte. Die Lösung dieses Problems kann ich heute vorlegen. Sie beruht auf der Bewertungstheorie.

Es ist leicht, eine lineare Schar von Kurven ohne feste Bestandteile auf einer algebraischen Fläche bei einer birationalen Transformation so zu transformieren, daß die transformierte Schar wieder eine lineare Schar ohne feste Bestandteile ist. Aber nun stößt man auf die paradoxe Erscheinung, daß eine Vollschar nicht ohne weiteres in eine Vollschar übergeht. Bei einer quadratischen Transformation der Ebene z. B.:

$$x_0 : x_1 : x_2 = x_1' x_2' : x_2' x_0' : x_0' x_1'$$

geht die lineare Schar aller Geraden der Ebene

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

in eine Kegelschnittschar mit 3 Basispunkten

$$\lambda_0 x_1' x_2' + \lambda_1 x_2' x_0' + \lambda x_0' x_1' = 0$$

über, die offensichtlich keine Vollschar ist, da sie sich zur fünfgliedrigen Schar aller Kegelschnitte der Ebene erweitern läßt.

Um die Situation zu retten, muß man den Begriff einer *linearen Schar mit vorgegebenen Basispunkten* einführen. Schreibt man nämlich in unserem Beispiel den Kegelschnitten der Schar ihre drei festen Punkte vor, so ist die Schar vollständig. In anderen Fällen muß man vorschreiben, daß die Kurven der Schar in einem Basispunkt eine gegebene Tangente haben oder durch gegebene Punkte doppelt oder dreifach hindurchgehen sollen.

Nun kann es vorkommen, daß die Kurven einer linearen Schar in einem Basispunkt effektiv eine höhere Multiplizität haben als die vorgeschriebene; daher unterscheidet man zwischen der *effektiven* und

der *virtuellen* (vorgeschriebenen) Multiplizität. Ist die effektive Multiplizität eines Basispunktes größer als die virtuelle, so muß man, wenn dieser Basispunkt durch eine birationale Transformation in eine Kurve übergeführt wird, nach ENRIQUES[1]) diese Kurve als festen Bestandteil zu sämtlichen Kurven der transformierten Schar hinzunehmen, mit einer Vielfachheit gleich der Übermultiplizität, d. h. gleich der Differenz von effektiver und virtueller Multiplizität vor der Transformation.

Will man diese Begriffe erschöpfend erklären, so muß man nicht nur gewöhnliche Basispunkte, sondern auch unendlich benachbarte in Betracht ziehen. Die Angelegenheit wird dann alsbald so kompliziert, daß eine Verallgemeinerung auf mehr als 2 Dimensionen fast aussichtslos erscheint. Jedoch gelingt diese Verallgemeinerung durch den *Bewertungsbegriff*. Dieser bildet einen vollständigen Ersatz für den Begriff des unendlich benachbarten Punktes und macht jedes Eingehen auf die Struktur dieser Nachbarpunkte überflüssig. Er ermöglicht eine birational invariante Theorie der linearen Scharen und Vollscharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, wie in § 4—8 auseinandergesetzt werden soll.

Vorher möge in enger Anlehnung an KÄHLER[2]) eine einfachere Art, birationale Invarianten zu gewinnen, behandelt werden, die den Bewertungsbegriff noch nicht voraussetzt. Beide Theorien beruhen auf einem Satz über Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit, den wir jetzt herleiten wollen.

§ 1.

Ein Satz über rationale Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit.

Das folgende Lemma gehört dem Gedankenkreis des NOETHERschen Fundamentalsatzes an:

Lemma. *Ist M eine glatte (d. h. singularitätenfreie) d-dimensionale Mannigfaltigkeit und sind alle Schnittbestandteile von M mit einer Hyperfläche $f = 0$ mit mindestens derselben Vielfachheit auch in dem Schnitt von M mit einer zweiten Hyperfläche $F = 0$ enthalten, so gilt eine Identität*

$$x_0^{\varrho} F = Qf + R \tag{1}$$

wobei die Hyperfläche $R = 0$ die Mannigfaltigkeit M enthält.

Beweis. Die Gesamtheit aller Formen G, deren Produkt mit F sich in der gewünschten Weise darstellen läßt:

$$GF = Qf + R$$

ist ein H-Ideal. Wenn wir beweisen können, daß dieses H-Ideal keine

[1]) Siehe Enzyklopaedie d. math. Wiss. III C 6b und die dort angeführte Literatur.

[2]) E. KÄHLER, Forme differenziali e funzioni algebriche, Mem. Accad. Ital. Mat. **3**, 3, 1—19.

Nullstelle außer der trivialen $(0, \ldots, 0)$ besitzt, so sind wir fertig. Daraus folgt nämlich nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß eine geeignete Potenz von x_0 in dem H-Ideal enthalten ist, also (1) gilt.

Es sei also P ein Punkt des Raumes. Wir haben dann zu beweisen, daß es in dem H-Ideal eine Form G gibt, die in P nicht Null wird. Das bedeutet nämlich, daß P keine Nullstelle des H-Ideals ist.

Wenn P nicht auf M liegt, so gibt es eine Form G, die auf M überall Null wird, aber nicht in P. Dann ist auch GF Null auf M; wir können also

$$GF = R = 0 \cdot f + R$$

setzen und schließen, daß die Form G zum H-Ideal gehört. Damit ist dieser Fall erledigt: von jetzt an liege P auf M.

Es sei S_{n-d-1} ein linearer Raum, der weder M noch den Tangentialraum von M in P trifft. Beide Forderungen sind erfüllt, wenn S_{n-d-1} *allgemein* gewählt wird; und das wollen wir auch mit Rücksicht auf den folgenden Beweis tun.

Dann wird der Verbindungsraum S_{n-d} von S_{n-d-1} mit P die Mannigfaltigkeit M nur in endlich vielen Punkten treffen, unter denen P mit der Multiplizität 1 vorkommt. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß S_{n-d-1} die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ hat.

Für unbestimmte $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d$ hat der durch S_{n-d-1} gehende lineare Raum

$$x_0\xi_1 - x_1\xi_0 = 0,\ x_0\xi_2 - x_2\xi_0 = 0,\ \ldots,\ x_0\xi_d - x_d\xi_0 = 0$$

ebenfalls nur endlich viele Schnittpunkte mit M. Diese Punkte $\xi^{(\nu)} = (\xi_0, \ldots, \xi_d, \xi_{d+1}^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ sind dann allgemeine Punkte von M, also in Bezug auf den Körper k der rationalen Funktionen von $\xi_0, \ldots, \xi_d$ konjugiert. Einer von ihnen heiße ξ. Alle seine Koordinaten $\xi_0, \ldots, \xi_n$ sind dann ganze algebraische Funktionen der Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_d$, und der Grad des Körpers $k(\xi)$ über k ist gleich dem Grad γ der Mannigfaltigkeit M.

In diesem Körper bilden wir nun die Normen $n(\xi)$ und $N(\xi)$ der Körperelemente $f(\xi)$ und $F(\xi)$. Aus der Definition

$$N(\xi) = \prod_{\nu=1}^{\gamma} F(\xi^{(\nu)})$$

folgt leicht, daß $N(\xi)$ ein homogenes Polynom in $\xi_0, \ldots, \xi_d$ vom Grade $\beta\gamma$ ist, wo β der Grad der Form F ist. Ebenso ist $n(\xi)$ homogen in $\xi_0, \ldots, \xi_d$.

Wir wollen nun *erstens* zeigen, daß $n(\xi)$ durch $f(\xi)$ und $N(\xi)$ durch $F(\xi)$ teilbar ist:

$$n(\xi) = g(\xi)\, f(\xi) \tag{2}$$

$$N(\xi) = G(\xi)\, F(\xi), \tag{3}$$

zweitens, daß die Form N durch n teilbar ist:

$$N(\xi) = A(\xi)\, n(\xi) \tag{4}$$

drittens, daß die in (3) vorkommende Form G im Punkte P nicht Null wird:

$$G(P) \neq 0. \tag{5}$$

Aus (2), (3), (4) folgt:

$$G(\xi)\, F(\xi) = A(\xi)\, g(\xi)\, f(\xi)$$

oder, wenn $A \cdot g = Q$ gesetzt wird,

$$G(\xi)\, F(\xi) - Q(\xi)\, f(\xi) = 0.$$

Folglich ist $R = GF - Qf$ Null auf M und wir haben

$$GF = Qf + R.$$

Somit gehört G zum H-Ideal, womit alles bewiesen ist. Also brauchen wir nur noch (2), (3), (4), (5) zu beweisen.

$F(\xi)$ genügt einer algebraischen Gleichung vom Grade γ, deren letztes Glied gerade $N(\xi)$ ist:

$$F(\xi)^{\gamma} + a_1 F(\xi)^{\gamma-1} + \ldots + a_{\gamma-1} F(\xi) \pm N(\xi) = 0$$

Löst man $N(\xi)$ aus dieser Gleichung auf, so erhält man gerade die Gleichung (3). Ebenso beweist man (2).

Um (4) zu beweisen, müssen wir die Hyperflächen $N = 0$ und $n = 0$ näher charakterisieren. Wir behaupten:

A. Die Hyperfläche $N = 0$ ist der projizierende Kegel des Durchschnittes von $F = 0$ mit M aus dem linearen Raum S_{n-d-1}, und ihre irreduziblen Bestandteile haben dieselben Vielfachheiten wie die entsprechenden Bestandteile dieses Durchschnittes. Entsprechend verhält sich $n = 0$ zu $f = 0$.

Nehmen wir diese Behauptung für einen Augenblick als bewiesen an, so folgt daraus, da die irreduziblen Bestandteile des Durchschnittes von $f = 0$ mit M mit mindestens derselben Vielfachheit auch im Durchschnitt von $F = 0$ mit M enthalten sind, daß der projizierende Kegel $n = 0$ in dem projizierenden Kegel $N = 0$ enthalten ist. Also ist die Form $N(x)$ durch $n(x)$ teilbar, womit (4) bewiesen ist.

Aber auch (5) folgt jetzt leicht. Nach ZAG 14, § 5 (Math. Anm. **115**, S. 635) setzt der Durchschnitt des projizierenden Kegels $N = 0$ mit M sich zusammen aus dem Durchschnitt von $F = 0$ mit M und einem Restschnitt S, der den Punkt P nicht enthält. Nun folgt aus (3), daß $N - GF$ Null ist auf M, also ist der Durchschnitt von $N = 0$ mit M derselbe wie der von $GF = 0$ mit M, also zusammengesetzt aus dem Durchschnitt von $F = 0$ mit M und dem von $G = 0$ mit M. Also ist der Restschnitt S genau der Durchschnitt der Hyperfläche $G = 0$ mit M. Da P nicht zu diesem Durchschnitt gehört, ist $G(P) \neq 0$.

Es kommt also nur noch darauf an, die Behauptung A für beliebige Hyperflächen $F = 0$ zu beweisen. Es sei also I ein irreduzibler Bestandteil des Durchschnittes von $F = 0$ mit M mit der Vielfachheit μ, und es sei K der projizierende Kegel von I, d. h. die Gesamtheit aller Punkte, deren Verbindungsraum mit S_{n-d-1} einen Punkt von I enthält. Wir haben zu beweisen, daß K mit derselben Vielfachheit μ in $N = 0$ enthalten ist.

Die Form $N(x)$ hängt nur von $x_0, \ldots, x_d$ ab. Zerlegen wir sie in irreduzible Faktoren

$$N(x) = N_1 N_2 \ldots N_h,$$

so hängen auch diese Faktoren nur von $x_0, \ldots, x_d$ ab. Wenn also ein Punkt Q von M einer Hyperfläche $N_i(x) = 0$ angehört, so gehört auch der ganze Verbindungsraum von Q mit S_{n-d-1} der Hyperfläche $N_i(x) = 0$ an, und wenn die irreduzible Mannigfaltigkeit I einer Hyperfläche $N_i(x) = 0$ angehört, so gehört der ganze irreduzible Verbindungskegel K dieser Hyperfläche an, also ist dann K mit dieser Hyperfläche $N_i = 0$ identisch.

Aus (3) folgt, wie schon bemerkt, daß $N = 0$ dieselbe Schnittmannigfaltigkeit mit M hat wie $GF = 0$. In dieser Schnittmannigfaltigkeit ist I als Bestandteil enthalten, und zwar mindestens mit der Multiplizität μ. Also muß mindestens einer von den irreduziblen Bestandteilen $N_i = 0$ die Mannigfaltigheit I enthalten, und zwar müssen so viele von ihnen I enthalten, daß insgesamt mindestens die Schnittmultiplizität μ herauskommt. Wir haben aber gesehen, daß die Hyperflächen $N_i = 0$, die I enthalten, mit dem Kegel K identisch sind. Also muß der Kegel K so oft als Bestandteil in $N = 0$ enthalten sein, daß insgesamt die Schnittmultiplizität μ für I herauskommt.

Nun folgt aber aus dem angeführten Satz ZAG 14, § 5, daß I nur einmal gezählt als Bestandteil in dem Durchschnitt von M und K enthalten ist. Also muß der Kegel K mindestens μ mal in der Hyperfläche $N = 0$ enthalten sein, damit die erforderliche Schnittmultiplizität μ herauskommt.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß K nicht mehr als μ mal als Bestandteil in der Hyperfläche $N = 0$ enthalten ist.

Der Durchschnitt von $F = 0$ und M hat, wenn seine irreduziblen Bestandteile I mit ihren Vielfachheiten μ gezählt werden, den Grad $\beta\gamma$. Also hat auch der projizierende Kegel dieses Durchschnittes, wenn seine irreduziblen Bestandteile K mit ebendenselben Vielfachheiten μ gezählt werden, den Grad $\beta\gamma$. Die Hyperfläche $N = 0$ hat aber auch nur den Grad $\beta\gamma$. Also kann sie die Kegel K nicht öfter als je μ mal als Bestandteile enthalten. Damit ist die Behauptung A bewiesen und der Beweis des Lemmas beendet.

Wir betrachten nun rationale Funktionen auf M

$$\varphi(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \frac{f(\xi_0, \ldots, \xi_n)}{g(\xi_0, \ldots, \xi_n)}$$

wo ξ ein allgemeiner Punkt von M ist und wo f und g Formen gleichen Grades sind. Die λ-Stellen dieser Funktion werden durch die Gleichung

$$f - \lambda g = 0$$

gegeben. Statt dessen kann man, wenn $\lambda = -\lambda : \lambda_1$ gesetzt wird auch schreiben

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung definiert eine lineare Schar von Mannigfaltigkeiten M_{d-1} auf M. Die festen Bestandteile dieser linearen Schar können außer Betracht bleiben. Die übrig bleibenden Teile definieren die *Niveaumannigfaltigkeiten* der Funktion φ, insbesondere für $\lambda_2 = 0$ die *Nullmannigfaltigkeit* und für $\lambda_1 = 0$ die *Polmannigfaltigkeit* von φ Alle diese sind rein $(d-1)$-dimensial, und jeder ihrer irreduziblen Bestandteile hat eine wohldefinierte Vielfachheit. Die Vielfachheit eines irreduziblen Bestandteils $\mathfrak{P}$ in der Polmannigfaltigkeit z. B. ist gleich der Vielfachheit von $\mathfrak{P}$ als Bestandteil der Schnittmannigfaltigkeit von $g = 0$ mit M, vermindert um das Minimum der Vielfachheiten von $\mathfrak{P}$ als Bestandteil der Schnittmannigfaltigkeiten von $f = 0$ und $g = 0$ mit M.

Satz 1. *Wenn ein Punkt P von M nicht auf der Polmannigfaltigkeit der Funktion $\varphi = \frac{f}{g}$ liegt, so kann man den Nenner g so wählen, daß er nicht Null wird im Punkte P.* Man sagt dann, daß die Funktion φ *endlich bleibt* in P.

Beweis. Die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ mögen aus M Schnittmannigfaltigkeiten AC und BC ausschneiden, wobei B die Polmannigfaltigkeit von φ ist, zu der P nach Voraussetzung nicht gehört. Wir denken uns die Numerierung der Koordinaten so, daß $x_0 \neq 0$ in P. Nun legen wir durch die Mannigfaltigkeit B eine Hyperfläche $G = 0$, die nicht durch P geht. Sie möge M in BD schneiden. Die Hyperfläche $fG = 0$ schneidet dann M in $ABCD$. Da diese Schnittmannigfaltigkeit BC als Bestandteil enthält, so folgt nach dem Lemma

$$x_0^\varrho f G = Qg + R$$

also

$$\xi_0^\varrho f(\xi) G(\xi) = Q(\xi) g(\xi)$$

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{Q(\xi)}{\xi_0^\varrho G(\xi)}$$

wobei $x_0^\varrho G(x)$ im Punkte P nicht Null wird.

Ich habe an anderer Stelle[3]) ausgeführt, daß es in jedem einfachen Punkt P von M ein System von Ortsuniformisierenden $u_1, \ldots, u_d$ gibt, die dem Körper der rationalen Funktionen auf M angehören und für die man sogar geeignete Verhältnisse wie $\xi_0^{-1}\xi_k$ wählen kann, derart,

[3]) In der vorangehenden Arbeit, Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten.

daß, wenn etwa $\xi_0 = 1$ normiert wird, alle Ableitungen $\frac{d\xi_i}{du_j}$ an der Stelle P endlich bleiben. Bei geeigneter Numerierung der Koordinaten sind $\xi_0^{-1}\xi_1, \xi_0^{-1}\xi_2, \ldots, \xi_0^{-1}\xi_d$ Ortsuniformisierende für alle Punkte von M, mit Ausnahme einer höchstens $(d-1)$-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit.

Satz 2. *Wenn $u_1, \ldots, u_d$ Ortsuniformisierende für P sind und wenn eine rationale Funktion φ an der Stelle P endlich bleibt, so bleiben auch alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ an der Stelle P endlich.*

Beweis. Nach Satz 1 ist φ als Quotient

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{g(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

darstellbar, wobei $g(P) \neq 0$ ist. Nach der Regel für totale Differentiation ist nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial u_j} = \sum_k \frac{g(\xi)\, \partial_k f(\xi) - f(\xi)\, \partial_k g(\xi)}{g(\xi)^2} \frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}$$

Rechts bleibt alles endlich an der Stelle P, also bleibt auch die linke Seite endlich für P.

§ 2.

Die Kählerschen Tensoren.

Die inhomogenen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines allgemeinen Punktes einer glatten d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M seien separable algebraische Funktionen von $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Es sei weiter $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ ein System von rationalen Funktionen auf M, wobei jede der Indices $\lambda\mu\ldots\pi$ von 1 bis d läuft. Ein solches System heißt ein *Tensor* φ auf M, und die $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ heißen die *Komponenten* des Tensors in Bezug auf $\xi_1, \ldots, \xi_d$.

Die Tensorkomponenten können Symmetriebedingungen von der Art

$$\sum_S \alpha_S S\, \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} = 0$$

unterworfen werden, wo die α_S Konstante und die S Permutationen der Indices sind; z. B. kann verlangt werden, daß die Tensoren symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Ein antisymmetrischer oder alternierender Tensor mit s Indices definiert ein s-faches Differential auf M:

$$dw = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}\, d\xi_\lambda\, d\xi_\mu \ldots d\xi_\pi \tag{1}$$

wobei über jeden zweimal vorkommenden Index summiert wird.

Sind $u_1, \ldots, u_d$ Ortsuniformisierende eines Punktes, sodaß alle ξ_k differenzierbare Funktionen von $u_1, \ldots, u_d$ sind, so werden die Kom-

ponenten des Tensores φ in Bezug auf $u_1, \ldots, u_d$ durch

$$(2) \qquad \varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial u_\beta} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial u_\varepsilon}$$

definiert, wobei wieder über jeden zweimal vorkommenden Index zu summieren ist.

Die Transformationsformel (2) ist transitiv: transformiert man den Tensor φ zuerst auf $u_1, \ldots, u_d$, dann weiter auf $v_1, \ldots, v_d$, so erhält man dasselbe Ergebnis wie wenn man direkt auf $v_1, \ldots, v_d$ transformiert:

$$(3) \qquad \varphi_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'} = \sum \varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v_{\varepsilon'}}$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}}\right)\left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial u_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial v_{\beta'}}\right) \cdots \left(\frac{\partial \xi_\pi}{\partial u_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v_{\varepsilon'}}\right)$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial v_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial v_{\beta'}} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial v_{\varepsilon'}}.$$

Ein Vektor φ heißt *endlich in* P, wenn nach Transformation auf die Ortsuniformisierenden des Punktes P die Vektorkomponenten alle in P endlich bleiben. Diese Eigenschaft ist von der Wahl der Ortsuniformisierenden unabhängig. Denn wenn in (3) die $\varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ alle endlich bleiben in P und $u_1, \ldots, u_d$ ebenso, so bleiben nach Satz 2 auch die Ableitungen $\frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}}$ usw. endlich in P, also die ganze rechte Seite von (3) und somit auch die linke. Ebenso beweist man durch Vertauschung der u_α und $v_{\alpha'}$, daß aus der Endlichkeit der $\varphi_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'}$ die der $\varphi_{\alpha\beta\ldots}$ folgt.

Ist ein Tensor φ nicht endlich in P, so geht mindesten eine irreduzible Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ von einer Funktion $\varphi_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$ durch P. Ist k die höchste Vielfachheit von $\mathfrak{P}$ als Bestandteil einer Polmannigfaltigkeit einer Tensorkomponente $\varphi_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$, so zählt $\mathfrak{P}$ als *Polmannigfaltigkeit von der Vielfachheit* k *des Tensors* φ. Man beweist wie oben aus (3), daß diese Vielfachheit von der Wahl der Ortsuniformisierenden des Punktes P unabhängig ist.

Die Vielfachheit k ändert sich aber auch nicht, wenn P durch einen allgemeinen Punkt der Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ ersetzt wird; denn die Ortsuniformisierenden des Punktes P sind gleichzeitig Ortsuniformisierende des allgemeinen Punktes. Daraus folgt, daß die eben difinierte Vielfachheit nicht von der Wahl des Punktes P, sondern nur von $\mathfrak{P}$ abhängt.

Jeder Tensor hat nur endlich viele Polmannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$. Denn wenn man zunächst wieder ein bestimmtes System von unabhängigen veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_d$ dem Funktionenkörper zugrunde legt, so

können alle Vektorkomponenten $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ als Brüche $f_{\lambda\mu\ldots\pi}(\xi) : g(\xi)$ mit einem und demselben Hauptnenner $g(\xi)$ geschrieben werden. Als Punkte der Polmannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$ kommen nun erstens diejenigen in Betracht, in denen $g = 0$ wird, zweitens diejenigen, für die $\xi_1, \ldots, \xi_d$ nicht Ortsuniformisierende sind. Diese zwei Arten von Punkten verteilen sich aber auf je endlich viele $(d-1)$-dimensionale irreduzible Mannigfaltigkeiten.

Wir fassen zusammen: *Jeder Tensor besitzt eine rein $(d-1)$-dimensionale Polmannigfaltigkeit, bestehend aus endlich vielen irreduziblen Bestandteilen $\mathfrak{P}$ mit bestimmten Vielfachheiten. Außerhalb von dieser Polmannigfaltigkeit bleibt der Tensor in jedem Punkt endlich.*

Fehlt die Polmannigfaltigkeit, so heißt der Tensor *überall endlich*. Die überall endlichen alternierenden Tensoren s-ter Stufe definieren nach (1) die *überall endlichen s-fachen Differentiale* der Mannigfaltigkeit M.

§ 3.

Transformation der Tensoren.

Ist eine Mannigfaltigkeit M' rational auf M abgebildet, so entspricht jedem allgemeinen Punkt ξ' von M' ein allgemeiner Punkt ξ von M:

$$\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n = F_0(\xi') : F_1(\xi') : \ldots : F_n(\xi').$$

Bekanntlich wird die rationale Abbildung von M' auf M durch eine lineare Schar $\{C_\lambda\}$ vermittelt, die man erhält, wenn man die Formenschar

$$F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_n F_n$$

mit M' schneidet und den von λ unabhängigen Teil D der Schnittmannigfaltigkeit wegläßt. Die Fundamentalpunkte der Abbildung sind die Basispunkte der Schar; sie bilden eine höchstens $(d-2)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit B' von M'. Allen anderen Punkten von M' entspricht, wenn M' glatt ist, nur ein Bildpunkt auf M[4]).

Einem Tensor φ auf M entspricht ein Tensor φ' auf M' vermöge der Transformationsformel

$$\varphi'_{\lambda'\mu'\ldots\pi'} = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \xi'_{\lambda'}} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi'_{\mu'}} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial \xi'_{\pi'}}.$$

Dabei soll wieder $\xi_0 = \xi'_0 = 1$ sein, alle ξ_i separable Funktionen von $\xi_1, \ldots, \xi_d$ und alle ξ'_i separable Funktionen von $\xi'_1, \ldots, \xi'_d$. Sind $u'_{1'}, \ldots, u'_{d'}$ Ortsuniformisierende auf M', so werden die Komponenten von φ in Bezug auf sie durch

---

[4]) Siehe etwa B. L. v. d. Waerden, ZAG **6**, Math. Anm. **110**, § 6.

$$\varphi'_{\alpha'\beta'\dots\varepsilon'} = \sum \varphi'_{\lambda'\mu'\dots\pi'} \frac{\partial \xi'_{\lambda'}}{\partial u'_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial \xi'_{\pi'}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\dots\pi} \left(\frac{\partial \xi'_{\lambda'}}{\partial u'_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial \xi'_{\lambda'}}\right) \cdots \left(\frac{\partial \xi'_{\pi'}}{\partial u'_{\varepsilon'}} \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial \xi'_{\pi'}}\right)$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\dots\pi} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial u'_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

gegeben.

Wir beweisen nun nach KÄHLER:

Satz 3. *Wenn der Tensor φ auf M überall endlich ist, so ist auch φ' auf M' überall endlich.*

Beweis. Gesetzt, φ' hätte auf M' eine Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}'$. Wir wählen auf $\mathfrak{P}'$ einen Punkt P', der nicht Fundamentalpunkt der Abbildung ist. Das ist möglich, weil $\mathfrak{P}'$ die Dimension $d-1$ hat. Für den Bildpunkt P auf M können wir $p_0 \neq 0$ annehmen. Dann bleiben die Funktionen

$$\xi_i = \frac{\xi_i}{\xi_0} = \frac{F_i(\xi')}{F_0(\xi')}$$

im Punkt P' alle endlich. Wir können die Veränderliche so numerieren daß $\xi_1, \dots, \xi_d$ Ortsuniformisierende für P sind. $u'_1, \dots, u'_{d'}$ seien Ortsuniformisierende für P'. Dann bleiben in der Formel

$$\varphi'_{\alpha'\beta'\dots\varepsilon'} = \sum \varphi_{\lambda\mu\dots\varkappa} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial u'_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial u'_{\beta'}} \cdots \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

alle Größen rechter Hand endlich an der Stelle P'. Also bleibt auch die linke Seite endlich, q. e. d.

Ist die Abbildung birational, so folgt auch umgekehrt aus der Endlichkeit von φ' die von φ. Die überall endlichen Tensoren mit gegebenen Symmetriebedingungen bilden also jeweils eine birational invariante lineare Schar. Insbesondere gilt das von den ein- bis d-fachen Differentialen 1. Gattung. Auch die Dimensionen dieser linearen Scharen sind birational invariant. Daraus folgt speziell die Invarianz des geometrischen Geschlechtes p_g und der Irregularität $p_g - p_a$ einer algebraischen Fläche, der Mehrgeschlechter usw.

§ 4.

Bewertungen und Primdivisoren.

Es sei wieder M eine glatte, irreduzible Mannigfaltigkeit von der Dimension d. Die Teilmannigfaltigkeiten von M bezeichnen wir fortan als *Teile* von M, insbesondere die rein $(d-1)$-dimensionalen als *Höchstteile*, die höchstens $(d-2)$-dimensionalen als *niedere Teile*.

Jedes irreduzible Höchstteil (*Primhöchstteil*) $\mathfrak{P}$ von M definiert eine Bewertung des zu M gehörigen Funktionenkörpers. Ist nämlich ξ ein

allgemeiner Punkt von M und

$$\varphi = \frac{f(\xi_0, \ldots, \xi_n)}{g(\xi_0, \ldots, \xi_n)}$$

eine rationale Funktion auf M, so schneiden die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ aus M gewisse Höchstteile aus. Wenn nun $\mathfrak{P}$ darin mit den Vielfachheiten a und b vorkommt, so wird der Wert von φ in der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Bewertung durch

$$w(\varphi) = a - b$$

definiert. Wird dieselbe Funktion noch in anderer Weise dargestellt

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_1(\xi)}{g_1(\xi)},$$

so ist $fg_1 - f_1 g$ Null auf M, also schneidet fg_1 denselben Höchstteil aus M aus wie $f_1 g$, also ist $a + b_1 = a_1 + b$, also $a - b = a_1 - b_1$.

Die Bewertungseigenschaften

$$w(\varphi\psi) = w(\varphi) + w(\psi),$$
$$w(\varphi + \psi) \geqq \text{Min}\{w(\varphi), w(\psi)\}$$

sind erfüllt. Die erste ist selbstverständlich, die letzte folgt daraus, daß jede Hyperfläche der linearen Schar $\lambda_1 f_1 g_2 + \lambda_2 f_2 g_1 = 0$, insbesondere die Hyperfläche $f_1 g_2 + f_2 g_1 = 0$, die Mannigfaltigkeit M in $\mathfrak{P}$ mit mindestens dieselbe Vielfachheit schneidet, wie die kleinste der beiden Schnittvielfachheiten der Basishyperflächen $f_1 g_2 = 0$ und $f_2 g_1 = 0$ (vgl. etwa meine Einführung in die algebr. Geometrie, § 44, Satz 4).

Die so definierten Bewertungen heißen im zweidimensionalen Fall *Kurvenprimdivisoren*; im allgemeinen Fall nennen wir sie *höhere Primdivisoren*. Wir bezeichnen sie mit großen deutschen Typen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots$. Wir unterscheiden nicht zwischen dem Höchstteil $\mathfrak{P}$ (speziell auf einer Fläche: der Kurve $\mathfrak{P}$) und dem durch ihn bestimmten Primdivisor $\mathfrak{P}$.

Unter einem (höheren) *Divisor* $\mathfrak{D}$ verstehen wir nunmehr eine endliche Gesamtheit von höheren Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit beliebigen ganzzahligen Exponenten $e_1, \ldots, e_r$, die auch negativ sein dürfen, und schreiben

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \mathfrak{P}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$

Sind alle Exponenten $e_1, \ldots, e_r \geqq 0$, so heißt der Divisor $\mathfrak{D}$ *ganz*. Wir unterscheiden nicht zwischen dem ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ und dem entsprechenden Höchstteil von M, bestehend aus den Primhöchstteilen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit den Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$.

Das *Produkt* von zwei Divisoren wird, wie man sich denken kann, durch Addition der Exponenten gebildet. Bei dieser Produktdefinition bilden die Divisoren $\mathfrak{D}$ offensichtlich eine Abelsche Gruppe. Das Einselement dieser Gruppe ist der leere Divisor $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}^0$.

Zu jeder Funktion φ gehört ein Divisor $(\varphi) = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{-1}$, wobei $\mathfrak{B}$ die Nullmannigfaltigkeit und $\mathfrak{C}$ die Polmannigfaltigkeit von φ ist.

Außer den höheren Primdivisoren brauchen wir noch andere Bewertungen, die durch birationale Transformation in höhere Primdivisoren übergehen können. Zunächst ein Beispiel!

Ein einfacher Punkt P einer algebraischen Fläche M definiert eine Bewertung $\mathfrak{p}$. Ist nämlich wie oben

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

und hat die Schnittkurve von M mit $f = 0$ einen α-fachen Punkt in P und die von M mit $g = 0$ einen β-fachen, so kann man definieren

$$w_P(\varphi) = \alpha - \beta .$$

Die Eigenschaften der Bewertung gelten wie oben. Solche Bewertungen nennen wir *Punktbewertungen* oder *Punktprimdivisoren.*

Man kann eine Punktbewertung in eine Kurvenbewertung verwandeln, indem man durch eine birationale Transformation den Punkt P in eine Kurve überführt. Man braucht nur die lineare Kurvenschar, die die rationale Abbildung definiert, so zu wählen, daß sie in P einen einfachen Basispunkt hat.

In ähnlicher Weise definiert auch jeder zu P unmittelbar benachbarte Punkt P_1 (d. h. jede Tangentenrichtung von M in P) eine Bewertung. Wenn nämlich die Schnittkurve von $f = 0$ mit M im Punkt P einen α-fachen und im Nachbarpunkt P_1 einen α_1-fachen Punkt hat[5]), so kann man definieren

$$w_1(f) = \alpha + \alpha_1 ,$$
$$w_1(\varphi) = w_1(f) - w_1(g) .$$

Durch die birationale Transformation, die P in eine Kurve $\mathfrak{P}$ verwandelt, wird die Bewertung w_1 in eine Punktbewertung w_Q transformiert, wo Q ein Punkt von $\mathfrak{P}$ ist. Transformiert man sodann Q weiter in eine Kurve $\mathfrak{Q}$, so kann man die Bewertung w_1 sogar in eine Kurvenbewertung verwandeln.

Analog gehören auch zu den höheren Nachbarpunkten von P Bewertungen, die durch geeignete birationale Transformationen in höhere Primdivisoren verwandelt werden können.

Im mehrdimensionalen Fall gibt es keine Theorie der unendlich benachbarten Punkte, Kurven usw., aber der Bewertungsbegriff gibt uns einen vollwertigen Ersatz für diese fehlende Theorie. Wir definieren einfach:

Ein Primdivisor ist eine solche ganzzahlige Bewertung des Funktionenkörpers, in welcher die Konstanten den Wert Null haben und deren Restklassenring den Transzendenzgrad $n-1$ hat.

---

[5]) Für die Definition dieser Begriffe siehe meine Einführung in die algebr. Geom., § 55.

Man kann leicht beweisen, daß alle solche Bewertungen sich birational in höhere Primdivisoren transformieren lassen, aber wir brauchen nicht einmal das. — Alle Primdivisoren, die nicht höhere Primdivisoren sind, heißen *niedere Primdivisoren.*

Die Werte $w(\varphi)$ sind zunächst nur für Funktionen φ des Körpers definiert. Wir wollen nun $w(f)$ auch für Formen $f(x_0, \ldots, x_n)$ definieren, und schließlich auch $w(\mathfrak{D})$ für beliebige (höhere) Divisoren $\mathfrak{D}$.

Wir definieren zunächst eine teilweise Ordnung der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ durch die Festsetzung: x_i ist früher als x_k, wenn $w(\xi_i^{-1}\xi_k) > 0$ ist. Wenn x_i früher ist als x_k und x_k früher als x_l, so ist auch x_i früher als x_l. Wir können nun die Numerierung des $x_0, \ldots, x_n$ so abändern, daß frühere x_i auch eine kleinere Nummer haben. Dann ist insbesondere $w(\xi_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle x_k.

Nun definieren wir für jede Form $f(x_0, \ldots, x_n)$ vom Grade g:

$$w(f) = w\{\xi_0^{-g} f(\xi_0, \ldots, \xi_n)\} = w\left\{f\left(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)\right\}$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl von x_0, solange nur die Bedingung erfüllt bleibt, daß kein x_k früher ist als x_0. Denn wenn man x_0 etwa durch x_1 ersetzt und weder x_1 früher ist als x_0 noch x_0 früher als x_1, so ist $w(\xi_0^{-1}\xi_1) = 0$, also $w\{\xi_0^{-g} f(\xi)\} = w\{\xi_1^{-g} f(\xi)\}$. Man hätte ξ_0 auch durch eine Linearkombination $\eta_0 = a_0\xi_0 + \cdots + a_n\xi_n$ ersetzen können, vorausgesetzt daß $w(\eta_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle k und daher auch $w(\eta_0^{-1}\eta) \geqq 0$ für jede Linearkombination η von $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Die Definition von $w(f)$ ist also projektiv invariant.

Noch einfacher wird die Definition von $w(f)$, wenn man durch die Normierung $\xi_0 = 1$ inhomogene Koordinaten einführt, was wir von jetzt an tun wollen. Dann ist nämlich jede Form $f(\xi)$ selber eine Funktion des Körpers und es ist

$$w(f) = w\{f(\xi)\}.$$

Vor der Normierung muß man sich aber davon überzeugen, daß die Bedingung $w(\xi_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle k erfüllt ist.

Der so definierte Wert $w(f)$ ist offenbar niemals negativ. Diejenigen f, für die $w(f) > 0$ ist, bilden im Polynombereich von $x_0, \ldots, x_n$ ein Prim-H-Ideal, und zwar einen echten Teiler des die Mannigfaltigkeit M definierenden Primideals $\mathfrak{M}$. Die zu diesem Prim-H-Ideal gehörige irreduzible Mannigfaltigkeit N ist also ein echter Teil von M. Wir nennen N die *Nullmannigfaltigkeit der Bewertung* w. Sie hat die Eigenschaft, daß $w(f)$ größer oder gleich Null ist, je nachdem ob die Hyperfläche $f = 0$ sie enthält oder nicht.

Satz 4. *Wenn N die Dimension $d-1$ hat, so ist w der zu N gehörige höhere Divisor.*

Beweis: Es sei W der zu N gehörige höhere Divisor, also $W(fg^{-1}) = a - b$, wenn die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ aus M den

Höchstteil N mit den Vielfachheiten a und b ausschneiden. Wir zeigen zunächst: wenn $W(\varphi) \geqq 0$, so ist auch $w(\varphi) \geqq 0$, und wenn $W(\varphi) > 0$, dann auch $w(\varphi) > 0$.

Wenn $W(\varphi) \geqq 0$, so kann man nach Satz 1 die Funktion φ so als Quotient fg^{-1} darstellen, daß die Hyperfläche $g = 0$ die Nullmannigfaltigkeit N nicht enthält. Dann ist $w(g) = 0$, also $w(fg^{-1}) = w(f) - w(g) \geqq 0$. Ist insbesondere $W(\varphi) > 0$, so enthält $f = 0$ die Nullmannigfaltigkeit N, also ist $w(f) > 0$ und daher auch $w(fg^{-1}) > 0$. Ersetzt man nun φ durch φ^{-1}, so folgt ebenso: ist $W(\varphi) \leqq 0$, so ist auch $w(\varphi) \leqq 0$, und wenn $W(\varphi) < 0$, dann auch $w(\varphi) < 0$. Ist nun $W(\varphi) = 0$, so ist $w(\varphi)$ sowohl $\geqq 0$ als $\leqq 0$, also $= 0$. Also sind w und W beide gleichzeitig positiv, Null oder negativ. Daraus folgt aber leicht, daß die Bewertungen w und W äquivalent sind.

Die Umkehrung von Satz 4 ist trivial. Wir können also die höheren Primdivisoren auch charakterisieren als solche, deren Nullmannigfaltigkeiten Höchstteile von M, die niederen als solche, deren Nullmannigfaltigkeiten niedere Teile von M sind.

Nun zur Definition von $w(\mathfrak{D})$! Wir wählen einen beliebigen Punkt P_0 auf der Nullmannigfaltigkeit N des Primdivisors w. Zu jedem ganzen Divisor $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\dots\mathfrak{P}_\mu^{e_\mu}$ auf M gibt es nach SEVERI[6]) eine Hyperfläche $f = 0$, die aus M den Höchstteil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ausschneidet, wobei der Rest $\mathfrak{B}$ den Punkt P_0 und folglich die Mannigfaltigkeit N nicht enthält. Nun definieren wir

$$w(\mathfrak{A}) = w(f).$$

Die Definition ist von der Wahl der Hyperfläche $f = 0$ unabhängig. Denn wenn $g = 0$ eine zweite ebensolche Hyperfläche ist, die den Höchstteil $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ausschneidet, wobei $\mathfrak{C}$ wieder N nicht enthält, so können wir zunächst, indem wir eventuell unwesentliche Faktoren x_0^h hinzufügen, f und g als Formen gleichen Grades annehmen. Dann ist $\varphi = fg^{-1}$ eine Funktion des Körpers und

$$w(f) = w(\varphi g) = w(\varphi) + w(g).$$

Zur Funktion $\varphi = fg^{-1}$ gehört der Divisor

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{-1}.$$

Ein allgemeiner Punkt P von N ist weder in $\mathfrak{B}$ noch in $\mathfrak{C}$ enthalten. Nach Satz 1 können wir also φ auch so als Quotient FG^{-1} darstellen, daß G und daher auch F nicht Null werden in P. Dann ist

$$w(\varphi) = w(F) - w(G) = 0,$$

mithin

$$w(f) = w(g).$$

---

[6]) F. SEVERI, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933) S. 335 ff.

Die so definierte Funktion $w(\mathfrak{A})$ hat wieder die Eigenschaft, daß $w(\mathfrak{A}) > 0$ oder $= 0$, je nachdem ob der Höchstteil $\mathfrak{A}$ die Nullmannigfaltigkeit N enthält oder nicht. Weiter gilt offenbar

$$w(\mathfrak{AB}) = w(\mathfrak{A}) + w(\mathfrak{B}).$$

Wenn die Hyperfläche $f = 0$ genau den Hauptteil $\mathfrak{A}$ ausschneidet, so ist nach Definition $w(\mathfrak{A}) = w(f)$.

Für nichtganze Divisoren $\mathfrak{AB}^{-1}$ definieren wir schließlich

$$w(\mathfrak{AB}^{-1}) = w(\mathfrak{A}) - w(\mathfrak{B}).$$

Mit der ursprünglichen Bewertung $w(\varphi)$ ist diese erweiterte Bewertung $w(\mathfrak{D})$ in der Weise verknüpft, daß $w(\mathfrak{D}) = w(\varphi)$, wenn $\mathfrak{D}$ der zugehörige Divisor der Funktion φ ist, d. h. $\mathfrak{D} = \mathfrak{AB}^{-1}$, $\mathfrak{A}$ der Nulldivisor, $\mathfrak{B}$ der Poldivisor von φ.

Die Funktion $w(\mathfrak{D})$ bietet einen Ersatz für den Begriff der Vielfachheit einer Kurve in einem Punkt oder in einem unendlich benachbarten Punkt.

§ 5.

Virtuelle und effektive Multiplizitäten.

Es seien eine Anzahl *niedere* Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ und dazu gewisse *Mindestwerte* oder *vorgegebene Multiplizitäten* $a_1, \ldots, a_r$ gegeben. Wir betrachten die Gesamtheit aller ganzen Divisoren, die in den Bewertungen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ mindestens die Werte $a_1, \ldots, a_r$ haben.

Diese Mindestwerte bedingen im allgemeinen andere als *Folgewerte*. Alle ebenen Kurven z. B., die in einem vorgegebenen Punkt P eine Vielfachheit $a \geqq 3$ haben, haben in allen den Bewertungen, die zu den Nachbarpunkten P_1 von P gehören, von selbst auch den Mindestwert 3; denn der Wert in der zu P_1 gehörigen Bewertung ist die Summe $a + b$ der Vielfachheiten in P und P_1, und aus $a \geqq 3$ folgt $a + b \geqq 3$[7]).

Wir definieren also: wenn alle ganzen Divisoren, die in $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die Mindestwerte $a_1, \ldots, a_r$ haben, in $\mathfrak{p}$ von selbst den Mindestwert a, so heißt dieser Mindestwert ein *Folgewert* der vorgegebenen Mindestwerte. Alle diese (im allgemeinen unendlich viele) Folgewerte bilden zusammen ein *System von virtuellen Werten*.

Haben alle Divisoren einer linearen Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$ Werte $\geqq e$ und ist e das genaue Minimum dieser Werte, so heißt $e = e(\mathfrak{p})$ der *effektive Wert* der linearen Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$. Der effektive Wert kann auch definiert werden als das Minimum der

[7]) Ein anderes Beispiel: aus $a + b \geqq 3$ folgt $a \geqq 2$; denn die Kurven, die nicht durch P gehen, gehen auch nicht durch P_1, und die nur einfach durch P gehen, können auch nur einfach durch P_1 gehen.

Werte der Basisdivisoren der Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$. Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ ein höherer Primdivisor $\mathfrak{P}$, so enthalten alle Divisoren der Schar den gemeinsamen Faktor $\mathfrak{P}^e$.

Ist zu einer linearen Schar ein System von virtuellen Werten $v(\mathfrak{p})$ gegeben und erfüllen alle Divisoren der Schar auch wirklich die Bedingung, daß ihre Werte in der Bewertung $\mathfrak{p}$ mindestens $v(\mathfrak{p})$ betragen, so ist $e(\mathfrak{p}) \geqq v(\mathfrak{p})$. Die Differenz $e(\mathfrak{p}) - v(\mathfrak{p})$ heißt die *Übermultiplizität* oder der *Überwert* der Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$.

Beispiel. Die ebenen Kurven 3. Ordnung durch 8 gegebene Punkte $P_1, \ldots, P_8$ gehen alle noch durch einen neunten Punkt P_9 (der auch zu einem der gegebenen unendlich benachbart sein kann). Betrachtet man nun die 8 zu $P_1, \ldots, P_8$ gehörigen Mindestwerte 1 und ihre Folgewerte als virtuelle Werte für das Kurvenbüschel, so hat das Büschel in $P_1, \ldots, P_8$ keine Überwerte, aber in P_9 den Überwert 1.

Liegen aber von den 8 Punkten vier auf einer Geraden $\mathfrak{G}$, so enthalten alle Kurven des Büschels diese Gerade als Bestandteil. Zu der Bewertung $\mathfrak{G}$ gehört also der Überwert 1 und ebenso zu jedem Punkt von $\mathfrak{G}$, mit Ausnahme der 4 Punkte P_i auf $\mathfrak{G}$.

Im folgenden betrachten wir niemals eine lineare Schar allein, sondern immer eine lineare Schar mit einem System von virtuellen Werten, wobei wir annehmen, daß die Divisoren der Schar ganz sind und mindestens diese Werte haben. Ein Divisor $\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D}\mathfrak{C}_\lambda$ der Schar besteht aus einem festen Bestandteil $\mathfrak{D}$, der allen Divisoren der Schar gemeinsam ist, und einem von λ abhängigen Bestandteil $\mathfrak{C}_\lambda$. Die irreduziblen Bestandteile $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}$ haben, falls $\mathfrak{D}$ nicht 1 ist, positive effektive Multiplizitäten $e(\mathfrak{P})$; diese sind sämtlich als Übermultiplizitäten zu betrachten, denn virtuelle Werte $v(\mathfrak{p})$ gibt es nach der anfangs gegebenen Definition nur für niedere, nicht für höhere Divisoren.

§ 6.

Transformation der linearen Scharen.

Eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ohne feste Bestandteile ist definiert durch eine lineare Schar von Funktionen

$$\varphi_\lambda = \lambda_0 \varphi_0 + \cdots + \lambda_r \varphi_r \tag{1}$$

in folgender Weise: die zu φ_λ gehörigen Divisoren (φ_λ) werden zunächst mit einem ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ multipliziert, damit sie alle ganz werden, und dann mit $\mathfrak{B}^{-1}$, um sie von gemeinsamen festen Bestandteilen zu befreien:

$$\mathfrak{C}_\lambda = (\varphi_\lambda)\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}.$$

Fügt man nun noch einen beliebigen festen Divisor $\mathfrak{D}$ als Faktor hinzu, so erhält man die allgemeinste lineare Kurvenschar

$$\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{C}_\lambda\mathfrak{D} = (\varphi_\lambda)\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D} = (\varphi_\lambda)\mathfrak{F}.$$

Zu dieser Kurvenschar sei wie oben ein System virtueller Werte gegeben. Wir wollen das Verhalten der Schar bei einer birationalen Transformation, die M wieder in eine glatte Mannigfaltigkeit M' überführt, untersuchen.

Ist ξ ein allgemeiner Punkt von M und ξ' ein allgemeiner Punkt von M', so sind die ξ' rationale Funktionen von den ξ und umgekehrt, also kann man jede rationale Funktion von den ξ' auch durch die ξ ausdrücken und umgekehrt, also entspricht jeder rationalen Funktion $\varphi(\xi)$ eindeutig und isomorph eine rationale Funktion $\varphi'(\xi')$. Auf Grund dieses Körperisomorphismus entspricht auch jeder Bewertung von M eine Bewertung von M' und umgekehrt. Dabei kommt es nur endlich oft vor, daß einem höheren Primdivisor von M ein niederer Primdivisor auf M' entspricht oder umgekehrt; denn nur endlich viele Primhöchstteile von M werden in niedere Teile von M' transformiert (vgl. wieder ZAG **6**, Math. Ann. 110, § 6), und zu jedem dieser Primhöchstteile gehört nach Satz 4 nur ein höherer Primdivisor.

Der linearen Funktionenschar (1) entspricht auf M' wieder eine lineare Funktionenschar

$$\varphi'_\lambda = \lambda_0 \varphi'_0 + \cdots + \lambda_r \varphi'_r$$

und dieser wieder eine lineare Divisorenschar ohne feste Bestandteile

$$\mathfrak{C}'_\lambda = (\varphi'_\lambda)\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1}.$$

Am einfachsten ist die Transformation der linearen Schar $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ zu erklären, wenn diese *keine Überwerte*, also insbesondere auch keine festen Bestandteile $\mathfrak{D}$ hat. Dann ist $\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{C}_\lambda$, und wir erklären die transformierte Schar ebenso als $\mathfrak{D}'_\lambda = \mathfrak{C}'_\lambda$, *ohne feste Bestandteile und ohne Überwerte.* Das heißt also, wir setzen die virtuellen Werte für die transformierte Schar $\mathfrak{D}'_\lambda = \mathfrak{C}'_\lambda$ gleich den effektiven Werten.

Etwas komplizierter wird die Transformationsregel, wenn Überwerte vorhanden sind. Das Prinzip ist, daß die Überwerte erhalten bleiben sollen:

$$e(\mathfrak{p}) - v(\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{p}') - v(\mathfrak{p}'), \tag{2}$$

wenn dem Primdivisor $\mathfrak{p}$ der Primdivisor $\mathfrak{p}'$ entspricht, gleichgültig ob es sich dabei um höhere oder um niedere Primdivisoren handelt; nur daß für die höheren $v(\mathfrak{P}) = 0$ zu setzen ist. Man verfährt demnach so: zunächst wird $\mathfrak{C}'_\lambda$ wie oben bestimmt. Sodann wird $\mathfrak{D}'$ zusammengesetzt aus denjenigen höheren Primdivisoren $\mathfrak{P}'$, denen vor der Transformation solche höhere oder niedere Primdivisoren $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{p}$ entsprechen, die in $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ einen Überwert haben, mit Exponenten gleich diesen Überwerten, damit (2) für diese $\mathfrak{P}'$ erfüllt ist. Solche Divisoren $\mathfrak{P}'$ gibt es nur endlich viele; denn es gibt nur endlich viele in $\mathfrak{D}$ aufgehende höhere $\mathfrak{P}$ und auch nur endlich viel niedere $\mathfrak{p}$, die bei der Transformation in höhere übergehen. Jetzt sind $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{C}'_\lambda$, also auch

$\mathfrak{D}_\lambda' = \mathfrak{C}_\lambda' \mathfrak{D}'$ bekannt und somit auch die effektiven Werte $e(\mathfrak{p}')$ für alle niederen Primdivisoren $\mathfrak{p}'$. Schließlich bestimmt man die virtuellen Multiplizitäten $v(\mathfrak{p}')$ so, daß (2) stets erfüllt ist.

Es kann vorkommen, daß die so definierte virtuelle Multiplizität $v(\mathfrak{p}')$ negativ ausfällt. Besteht z. B. die Schar $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ aus der einen Geraden $x_0 = 0$ in der Ebene mit den Punkten $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ als vorgeschriebene Basispunkte und wendet man die in der Einleitung angegebene CREMONA-Transformation an, so besteht die transformierte Schar nur aus dem Einheitsdivisor $\mathfrak{E}$, und der Punkt $(1, 0, 0)$, der der Geraden $x_0 = 0$ in der Transformation entspricht, hat die effektive Multiplizität $e(\mathfrak{p}') = 0$ und den Überwert $e(\mathfrak{p}') - v(\mathfrak{p}') = e(\mathfrak{p}) - 0 = 1$, also die virtuelle Multiplizität $v(\mathfrak{p}') = -1$.

Die negativen virtuellen Multiplizitäten werden durch den Begriff der Folgewerte, den wir am Anfang des § 5 zur Definition der virtuellen Werte verwendeten, nicht erfaßt: die Folgewerte sind ihrer Definition nach stets positiv oder Null. Wir müssen den Begriff des virtuellen Wertsystems also erweitern, indem wir außer den Systemen von Folgewerten $v(\mathfrak{p})$ auch noch solche Systeme von virtuellen Werten $v(\mathfrak{p}')$ zulassen, die durch birationale Transformation nach der obigen Vorschrift aus Systemen von Folgewerten $v(\mathfrak{p})$ hervorgehen. In § 7 werden wir die zulässigen Systeme von virtuellen Werten noch anders charakterisieren lernen.

Wir können die Definition der transformierenden Schar $\{\mathfrak{D}_\lambda'\}$ noch etwas anders formulieren. Setzt man nämlich wie oben

$$\mathfrak{D}_\lambda = (\varphi_\lambda) \cdot \mathfrak{F}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{D}_\lambda' = (\varphi_\lambda') \cdot \mathfrak{F}',$$

so wird der Divisor $\mathfrak{F}'$ direkt durch die Forderung bestimmt, daß für jeden höheren Divisor $\mathfrak{P}'$ die Forderung (2) der Erhaltung der Überwerte erfüllt sein soll, wobei natürlich $v(\mathfrak{P}') = 0$ zu setzen ist. Man kennt also für jedes $\mathfrak{P}'$ die effektive Vielfachheit, mit der $\mathfrak{P}'$ im Produkt $(\varphi_\lambda') \cdot \mathfrak{F}'$ aufgehen muß, und da man auch (φ_λ') kennt, so ist damit $\mathfrak{F}'$ bekannt.

Wenn eine einzelne Funktion φ_λ in einer (höheren oder niederen) Bewertung $\mathfrak{p}$ einen um k höheren Wert hat als den Mindestwert aller Funktionen φ_λ, so hat auch die transformierte Funktion φ_λ' für $\mathfrak{p}'$ einen um k höheren Wert als den Mindestwert aller Funktionen φ_λ'; denn der Wert von φ_λ in der Bewertung $\mathfrak{p}$ ist gleich dem von φ_λ' in der Bewertung $\mathfrak{p}'$.

Ebenso sieht man: wenn eine lineare Teilschar der Funktionenschar $\{\varphi_\lambda\}$ einen um k höheren Mindestwert hat als die ganze Schar, so gilt dasselbe für die transformierte Schar. Die Hinzufügung der von λ unabhängigen Faktoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ ändert daran nichts. Beim Übergang von den Scharen $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{D}_\lambda'\}$ zu zwei sich entsprechenden

Teilscharen erhöhen sich also in (2) beide Seiten um denselben Betrag: die v bleiben nämlich ungeändert und die e erhöhen sich beide um k. Daher gilt die Relation (2) auch für die Teilschar, sobald sie für die ganze Schar gilt. Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Eine lineare Schar und eine Teilschar gehen wieder in eine lineare Schar und ihre entsprechende Teilschar über, wenn beide nach* (2) *transformiert werden.*

Durch diesen Satz wird erst klar, wie vernünftig die Transformationsvorschrift (2) ist.

Nach bekannten Schlüssen (vgl. etwa meine Einf. alg. Geom. § 46) ist jede lineare Schar in einer eindeutig bestimmten *Vollschar* enthalten, d. h. in einer solchen, die sich unter Beibehaltung der virtuellen Werte nicht mehr erweitern läßt. Nunmehr folgt aus Satz 5 unmittelbar die *Invarianz* des Begriffes der Vollschar:

Eine Vollschar geht bei der Transformation nach (2) *wieder in eine Vollschar über.*

§ 7.

Produkte und Quotienten von linearen Scharen.

Sind $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ lineare Scharen:

$$\mathfrak{A}_\lambda = (\varphi_\lambda)\cdot\mathfrak{F};\quad \varphi_\lambda = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r$$
$$\mathfrak{B}_\mu = \{\psi_\mu\}\cdot\mathfrak{G};\quad \psi_\mu = \mu_1\psi_1 + \ldots + \mu_s\psi_s$$

so ist die kleinste lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$, die alle Produkte $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu$ enthält, durch

$$\mathfrak{C}_\lambda = (\chi_\lambda)\,\mathfrak{F}\mathfrak{G}$$
$$\chi_\lambda = \lambda_1\varphi_1\psi_1 + \lambda_2\varphi_1\psi_2 + \ldots + \lambda_{rs}\varphi_r\psi_s$$

gegeben. Diese lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ heißt die *Produktschar* $\{\mathfrak{A}_\lambda\}\cdot\{\mathfrak{B}_\mu\}$. Als virtuelle Mindestwerte für die Produktschar gelten die Summen der virtuellen Werte der beiden Faktoren für jeden niederen Primdivisor $\mathfrak{p}$.

Jetzt wollen wir die *Restschar* einer Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ in Bezug auf eine Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ definieren. Wir wählen eine Kurve $\mathfrak{A}_0$ aus $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ willkürlich aus und setzen vorraus, daß es in der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ solche Divisoren $\mathfrak{C}$ gibt, die durch $\mathfrak{A}_0$ teilbar sind: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$. Wenn das der Fall ist, so bilden die Divisoren $\mathfrak{B}$, die mit $\mathfrak{A}_0$ multipliziert Divisoren der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ergeben, eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}:\mathfrak{A}_0$. Diese Schar ist aber von der Wahl von $\mathfrak{A}_0$ unabhängig, denn wenn $\mathfrak{B}$ zu der Schar gehört, so ist nicht nur $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$, sondern die ganze lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}\}$ in der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ enthalten[8]). Die Schar der $\mathfrak{B}$ hängt somit nur

[8]) Wenn eine lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}\mathfrak{B}$ mit einer Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ein Exemplar $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$ gemeinsam hat, so ist sie ganz in der Vollschar enthalten.

von den Scharen $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ ab und wird als Quotient $\{\mathfrak{C}_\lambda\}:\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ oder als *Rest* von $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ in Bezug auf $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ bezeichnet. Als virtuelle Werte der Quotientenschar werden die Differenzen der virtuellen Werte der Scharen $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ genommen. Die Quotientenschar kann auch definiert werden als die umfassendste Schar $\{\mathfrak{B}_\mu\}$, deren Produkt mit $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ eine Teilschar von $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ergibt. Sie ist offensichtlich wieder eine Vollschar.

Satz 6. *Jede Vollschar läßt sich als Quotient von zwei Vollscharen ohne Überwerte darstellen.*

Beweis. Zunächst seien die virtuellen Werte $v(\mathfrak{p})$ der Vollschar $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ nach § 5 als Folgewerte von irgendwelchen vorgegebenen Mindestwerten definiert. Die Formen F, die in allen Bewertungen $\mathfrak{p}$ mindestens die Werte $v(\mathfrak{p})$ haben, bilden ein H-Ideal, das nach dem Hilbertschen Basissatz eine endliche Basis $(F_1, \ldots, F_r)$ besitzt. Für jedes $\mathfrak{p}$ sind alle Werte $w(F_1), \ldots, w(F_r)$ mindestens gleich $v(\mathfrak{p})$. Wir wollen zeigen, daß das Minimum $v(\mathfrak{p})$ wirklich erreicht wird:

$$\text{(1)} \qquad \text{Min}\,\{w(F_1), \ldots, w(F_r)\} = v(\mathfrak{p}).$$

Nach der Definition des Begriffes Folgewert ist $v(\mathfrak{p})$ das Minimum der Werte $w(\mathfrak{A})$ für alle Divisoren $\mathfrak{A}$, die die vorgegebenen Mindestwerte haben. Also ist $v(\mathfrak{p}) = w(\mathfrak{A})$ für ein geeignetes solches $\mathfrak{A}$. Nach der Definition von $w(\mathfrak{A})$ aber (§ 4) ist $w(\mathfrak{A})$ gleich einem geeigneten $w(F)$, wo F ebenso wie $\mathfrak{A}$ mindestens die vorgeschriebenen Mindestwerte hat, also dem H-Ideal angehört. Wären nun alle $w(F_1), \ldots, w(F_\mu)$ größer als $v(\mathfrak{p})$, so wäre auch $w(\mathfrak{A})$ größer als $v(\mathfrak{p})$, was nicht geht. Also ist (1) richtig.

(1) gilt übrigens nicht nur für niedere, sondern auch für höhere Primdivisoren, nur daß dann natürlich $v(\mathfrak{p}) = 0$ ist.

Die Formen $G(x)$, deren Durchschnitte mit M den Divisor $\mathfrak{B}_0$ als Faktor enthalten, bilden wieder ein H-Ideal mit einer endlichen Basis $(G_1, \ldots, G_s)$. Man beweist wie oben, daß

$$\text{(2)} \qquad \text{Min}\,\{w(G_1), \ldots, w(G_s)\} = w(\mathfrak{B}_0)$$

für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ gilt.

Nun sei m das Maximum der Gradzahlen von $F_1, \ldots, F_\mu, G_1, \ldots, G_s$. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{p}$ in jedem der beiden vorhin erwähnten H-Ideale Formen F oder G vom Grade m, für welche gilt

$$\text{(3)} \qquad w(F) = v(\mathfrak{p})$$

$$\text{(4)} \qquad w(G) = w(\mathfrak{B}_0)$$

Die Formen F vom Grade m, die in allen Bewertungen $\mathfrak{p}$ mindestens die Werte $v(\mathfrak{p})$ haben, schneiden aus M eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ aus, deren effektiver Mindestwert für jedes $\mathfrak{p}$ genau gleich dem virtuellen $v(\mathfrak{p})$ ist, also eine lineare Schar ohne Überwerte. Ebenso schneiden

die Formen G vom Grade m, die durch $\mathfrak{B}_0$ teilbar sind, aus M eine lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_0\}$ aus, deren effektiver Mindestwert für jedes $\mathfrak{p}$ gleich $w(\mathfrak{B}_0)$ ist. Läßt man den festen Bestandteil $\mathfrak{B}_0$ aus dieser Schar weg, so bleibt die Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ übrig, deren effektive Mindestwerte demnach Null sind. Setzt man die virtuellen Mindestwerte dieser Schar auch Null, so hat man wieder eine Schar ohne Überwerte.

Nun ist aber klar, daß die Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_0\}$ als Teilschar in $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ enthalten ist. Die Quotientenschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\} : \{\mathfrak{A}_\lambda\}$ enthält also $\mathfrak{B}_0$, hat dieselben virtuellen Werte wie $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ und ist daher mit der Vollschar $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ identisch. Damit ist Satz 6 für diesen Fall bewiesen.

Sind nun zweitens die virtuellen Werte $v(\mathfrak{p})$ nicht als Folgewerte, sondern nach § 6 durch Transformation definiert, so kann man vor der Transformation den eben dargestellten Beweis geben. Das Ergebnis ist birational invariant, gilt also auch nach der Transformation.

Auf Grund von Satz 6 läßt sich jedes zulässige System von virtuellen Werten darstellen als Differenz zweier Systeme von effektiven Werten von wirklichen linearen Scharen ohne feste Bestandteile. Diese Charakterisierung der virtuellen Wertsysteme ist birational invariant.

§ 8.

Virtuelle Vollscharen und Divisorenklassen.

Eine Vollschar $|\mathfrak{A}|$ ist bestimmt durch einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ und ein System von virtuellen Werten $u(\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{A}$ mindestens diese Werte $u(\mathfrak{p})$ haben muß:

$$w(\mathfrak{A}) \geqq u(\mathfrak{p}) \qquad \text{für jedes } \mathfrak{p}.$$

Zwei Vollscharen $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$ werden multipliziert, indem man die Repräsentanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ multipliziert und die virtuellen Werte $u(\mathfrak{p})$, $v(\mathfrak{p})$ addiert. Die Division ist nur dann möglich, wenn der Quotient $|\mathfrak{A}| : |\mathfrak{B}|$ existiert; dann ist sie aber eindeutig. Die Vollscharen bilden also eine Abelsche Halbgruppe.

Man kann diese Halbgruppe leicht zu einer Gruppe erweitern, indem man formal Brüche einführt, mit den üblichen Festsetzungen

$$(1) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = \frac{|\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{D}|}, \text{ wenn } |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{D}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$$

$$(2) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} \cdot \frac{|\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{D}|}$$

$$(3) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = |\mathfrak{C}|, \text{ wenn } |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$$

Diese Brüche nennt man *virtuelle Vollscharen*. Eine virtuelle Vollschar ist demnach bestimmt durch einen gebrochenen Divisor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ und ein System von virtuellen Werten, die Differenzen der virtuellen Werte der Zähler- und Nennerschar. Dabei darf der gebrochene Divisor

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ durch jeden äquivalenten Divisor $\mathfrak{C}\mathfrak{D}^{-1}$ ersetzt werden: zwei Divisoren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ heißen bekanntlich äquivalent, wenn ihr Quotient $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^{-1}$ der Divisor einer Funktion φ des Funktionenkörpers ist. Die virtuellen Werte der virtuellen Vollschar aber dürfen nicht durch andere ersetzt werden: ändert man sie, so erhält man eine andere virtuelle Vollschar. Das alles folgt leicht aus der Gleichheitsdefinition (1).

Rechnet man alle zu einem (gebrochenen) Divisor $\mathfrak{F}$ äquivalenten Divisoren zu einer *Divisorenklasse*, so kann man das Gesagte auch so ausdrücken: *Eine virtuelle Vollschar ist bestimmt durch eine Divisorenklasse und ein System virtueller Werte.* Das System virtueller Werte ist dabei nicht willkürlich, sondern es muß sich als Differenz von zwei Systemen effektiver Mindestwerte von wirklichen Vollscharen ohne Überwerte darstellen lassen. Aus Satz 6 folgt nämlich, daß jede virtuelle Vollschar sich als Quotient von effektiven Vollscharen ohne Überwerte darstellen läßt:

$$\frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = \frac{|\mathfrak{C}| : |\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{G}| : |\mathfrak{H}|} = \frac{|\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{D}| \cdot |\mathfrak{G}|};$$

wo $|\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{H}|$ effektive Vollscharen ohne Überwerte sind.

Der Begriff der Divisorenklasse ist nicht birational invariant, wohl aber der Begriff „virtuelle Vollschar".

(Eingegangen am 5. März 1945.)

51. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Bückner, Dr. H., Göttingen, Merkelstr. 3: Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben 423

Sprague, R., Berlin-Charlottenburg 2, Schillerstr. 15: Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen 466

Dinghas, Prof. Dr. A., Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8, Mathematisches Institut: Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol 469

Müller, Prof. Dr. M., Tübingen, Mathematisches Institut der Universität: Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung 474

van der Waerden, Prof. Dr. B. L., Laren/Holland, Verlengde Engweg 10: Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten 497

van der Waerden, Prof. Dr. B. L., Laren/Holland, Verlengde Engweg 10: Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten 502

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Gesamtherstellung: fotokop wilhelm weihert, Darmstadt